

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação
Departamento de Comunicações

Detector Multiusuário Sub-Ótimo por Confiabilidade de Amostras

Autor: Celso Iwata Frison

Orientador: Prof. Dr. Celso de Almeida

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Telecomunicações e Telemática**

Campinas, Outubro de 2009

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação
Departamento de Comunicações

Detector Multiusuário Sub-Ótimo por Confiabilidade de Amostras

Autor: Celso Iwata Frison

Orientador: Prof. Dr. Celso de Almeida

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Telecomunicações e Telemática**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso de Almeida (Orientador) - FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Edson Luis Ursini - CESET/UNICAMP

Prof. Dr. Gustavo Fraidenraich - FEEC/UNICAMP

Campinas, Outubro de 2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F918d Frison, Celso Iwata
Detector multiusuário sub-ótimo por confiabilidade
de amostras / Celso Iwata Frison. – Campinas, SP: [s.n.],
2009.

Orientador: Celso de Almeida.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Detecção de sinais. 2. Confiabilidade
(Engenharia). 3. Confiabilidade (Engenharia) - Metodos
estatísticos. 4. Código de controle de erros (Teoria da
informação. 5. Teoria dos erros. I. Almeida, Celso de.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês:	Sub-optimal multiuser detector based on reliable samples
Palavras-chave em Inglês:	Signal detection, Reliability engineering, Reliability engineering statistical, Error detecting code, Theory of errors
Área de concentração:	Telecomunicações e Telemática
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Edson Luis Ursini, Gustavo Fraidenraich
Data da defesa:	21/10/2009
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Celso Iwata Frison

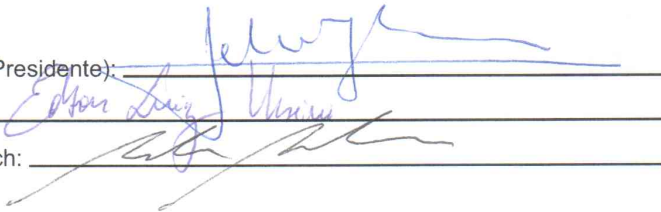
Data da Defesa: 21 de outubro de 2009

Título da Tese: "Detector Multiusuário Sub-Ótimo por Confiabilidade de Amostras"

Prof. Dr. Celso de Almeida (Presidente):

Prof. Dr. Edson Luiz Ursini:

Prof. Dr. Gustavo Fraidenraich:

The image shows three handwritten signatures in blue ink, each written over a horizontal line. The first signature is for Prof. Dr. Celso de Almeida (Presidente), the second is for Prof. Dr. Edson Luiz Ursini, and the third is for Prof. Dr. Gustavo Fraidenraich. The signatures are stylized and cursive.

Resumo

Dentre as técnicas de detecção multiusuário existentes em sistemas CDMA, a técnica conhecida como ótima é a responsável por gerar a menor probabilidade de erro de símbolo possível. Porém, o desempenho referente a esta técnica é obtido através de uma elevada complexidade em número de cálculos, o que leva à sua impraticabilidade em sistemas reais. Com isso, um detector multiusuário sub-ótimo que utiliza limiares de confiabilidade nas amostras recebidas para classificá-las como confiáveis ou não-confiáveis é proposto em um ambiente CDMA síncrono. Cada uma destas amostras já classificadas, recebe um processamento diferenciado na detecção. A introdução de limiares de confiabilidade na detecção multiusuário demonstrou que um desempenho equiparável ao de um detector multiusuário ótimo pode ser possível, e ao mesmo tempo com uma menor complexidade em número de cálculos realizados. Uma modelagem matemática foi desenvolvida para a obtenção das equações de complexidade em número de cálculos e da probabilidade de erro de bit. Estas expressões analíticas foram validadas através de simulações realizadas.

Palavras-chave: Detecção Multiusuário, Confiabilidade, Limiar, Complexidade, Probabilidade de Erro de Bit.

Abstract

Among all the existing multiuser detection techniques in CDMA systems, the one which gives the minimum symbol error probability is called optimum. Conversely, the performance of this technique is obtained with a high complexity in the number of calculations, which make this technique impracticable in real systems. Then, a sub-optimum multiuser detector which applies reliability thresholds to the received samples, to classify them as reliable or nonreliable, is proposed in a synchronous CDMA system. Each one of these samples that has been already classified receives a different management in the detection process of the bits. The insertion of these reliability thresholds in the multiuser detection showed that a performance similar to the optimum multiuser detector could be achieved, and at the same time, with a significant reduction in the number of calculations (detector's complexity). Theoretical equations of complexity and bit error rate are presented. These theoretical expressions are tight when compared to the respective simulations.

Keywords: Multiuser Detection, Reliability, Threshold, Complexity, Bit Error Rate.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por me oferecer todas as capacidades intelectuais e físicas para ser o que sou hoje, e também por me guiar pelos caminhos irrepreensíveis durante esta longa caminhada.

Agradeço ao Prof. Dr. Celso de Almeida por sua dedicada orientação, presteza e contribuição ímpar para a conclusão deste trabalho de Mestrado.

Aos meus pais Celso e Ana Cecília, pelo eterno e incondicional amor cedido durante toda minha vida, pelo amparo nos momentos de dúvida e apoio dado em minhas escolhas.

Ao meu irmão Ulisses, pelo convívio cordial e irmandade fraterna.

A minha querida namorada Ana Carolina, por sua paciência nos momentos em que as simulações eram imprescindíveis, mas principalmente pelo amor compartilhado e apoio concedido ao longo de todo este tempo.

Aos meus grandes amigos mestrandos Daniel de Figueiredo e Michel Troyano, pela amizade sincera refletida através da compreensão nos momentos difíceis e a partilha de tantas alegrias vivenciadas. Também ao grande Rodrigo Gonçalves, um excelente amigo e colega de república, sempre prestativo e muito consultado nas horas de dúvidas severas.

Também aos meus amigos poços-caldense, Diogo de Freitas, Erivelton e Teresa Siqueira, Fabrício e Fábio de Souza, Hagra Bertozzi, Henrique Caponi, Vinícius Gianelli, Rodrigo Quiles e Tiago Plachi pela ajuda intrínseca à nossa amizade.

A todos meus amigos petequiros, pelos momentos de relaxamento sempre bem vindos após uma árdua semana de trabalho.

Aos amigos do DCLab (*Digital Communication Laboratory*) Márzio, Tarciana, José Barros, Luís Otávio, Renata, Dina e Danny, pelo companheirismo e convivência nestes três anos.

Aos professores Edson, Gustavo e Carlos Eduardo por participarem da banca examinadora e serem parte essencial desta dissertação.

Aos Professores Renato Baldini, Jaime Portugheis, Paulo Cardieri, Michel Yacoub e Renato Lopes pelos indispensáveis conhecimentos transmitidos em suas aulas.

Aos colegas da Unicamp, Marcos Covre, Lucas, Anderson, David, Maurício, Lídia, Francisco, entre

tantos outros pelo convívio e dicas compartilhadas.

Por fim, ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro ao projeto.

Aos meus pais e meu irmão

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
Glossário	xxi
Lista de Símbolos	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Visão Geral do Trabalho	2
2 Conceitos Básicos	5
2.1 Técnicas de Múltiplo Acesso	5
2.1.1 FDMA	5
2.1.2 TDMA	6
2.1.3 CDMA	6
2.1.4 Híbridos	6
2.1.4.1 FDMA/TDMA	7
2.1.4.2 FDMA/CDMA	7
2.1.4.3 TDMA/CDMA	7
2.2 Modelo de Canal	7
2.2.1 Canal AWGN	7
2.3 Características de Sistemas CDMA	8
2.3.1 Espalhamento Espectral	8
2.3.2 Controle de Potência	10
2.3.3 Sistema de Comunicações CDMA em Banda Base	10
2.3.4 Sistema de Comunicações CDMA em Banda Passante	15
2.4 Função $Q(x)$	18
2.5 Simulações de Monte Carlo	20
2.6 Detector Convencional	21
3 Detector Multiusuário Ótimo	25
3.1 Algoritmo de Detecção Ótimo	25
3.1.1 Análise em Banda Base	26
3.1.2 Análise em Banda Passante	27

3.2	Modelagem Matemática da Expressão do Detector Ótimo	29
3.2.1	Dois Usuários	29
3.2.2	Três Usuários	32
3.2.3	Quatro Usuários	33
3.2.4	K Usuários	34
3.3	Resultados Obtidos	35
4	Detector Multiusuário por Confiabilidade	41
4.1	Algoritmo de Detecção Sub-ótimo	41
4.2	Complexidade do Algoritmo de Detecção Sub-ótimo	44
4.3	Probabilidade de Erro de Bit do Algoritmo Sub-ótimo	46
4.4	Resultados Obtidos	48
4.4.1	Resultados em Banda Base	49
4.4.2	Resultados em Banda Passante	61
5	Conclusão	69
5.1	Contribuições da Dissertação	70
5.2	Propostas para Trabalhos Futuros	70
	Referências Bibliográficas	71
A	Obtenção da Expressão Limitante da Probabilidade de Erro de Bit para o Detector Multiusuário Ótimo	73
A.1	Dois Usuários	73
A.2	Três Usuários	76
A.3	Quatro Usuários	82

Lista de Figuras

2.1	Densidade espectral de potência S do sinal antes e depois do espalhamento.	9
2.2	Transmissor e Receptor de um sistema CDMA em banda base do k -ésimo usuário. .	11
2.3	Transmissor e Receptor de um sistema CDMA em banda passante do k -ésimo usuário.	16
2.4	Valores da função $Q(x)$ para $x > 0$	19
2.5	Estrutura do detector convencional para o caso em banda passante.	21
3.1	Estrutura do detector multiusuário ótimo para transmissão síncrona em banda base. .	27
3.2	Estrutura do detector multiusuário ótimo para transmissão síncrona em banda passante.	28
3.3	Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 16 chips/bit com 2 usuários ativos.	36
3.4	Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 16 chips/bit com 10 usuários ativos.	37
3.5	Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit com 10 usuários ativos.	38
3.6	Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 128 chips/bit com 30 usuários ativos.	39
4.1	Regiões de confiabilidade e não-confiabilidade das amostras, onde $\pm L$ são os limiares de confiabilidade.	42
4.2	Função densidade de probabilidade das amostras na saída do filtro casado, para limiares de confiabilidade L e $-L$	44
4.3	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB.	50
4.4	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB.	50
4.5	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB.	51
4.6	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB.	52

4.7	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB.	53
4.8	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB.	53
4.9	Complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual a 64 chips/bit. Comparação para relações sinal-ruído iguais a 5 e 8 dB.	54
4.10	Complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos e relação sinal-ruído igual a 8 dB. Comparação para ganhos de processamento igual a 32, 64 e 128 chips/bit.	55
4.11	Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 0,5. Comparação entre equação teórica do algoritmo sub-ótimo e simulação.	56
4.12	Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 0,8. Comparação entre equação teórica do algoritmo sub-ótimo e simulação.	57
4.13	Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 1,2. Comparação entre equação teórica do algoritmo sub-ótimo e simulação.	58
4.14	Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 0. Comparação do desempenho do detector sub-ótimo com o desempenho do filtro casado.	58
4.15	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 0,5.	59
4.16	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 0,8.	60
4.17	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 1,0.	61
4.18	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 10.	62
4.19	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 0,0.	62

4.20	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB em banda passante.	63
4.21	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB em banda passante.	64
4.22	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB em banda passante.	64
4.23	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB em banda passante.	65
4.24	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB em banda passante.	66
4.25	Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB em banda passante.	66
4.26	Complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos e relação sinal-ruído igual a 8 dB. Comparação para ganhos de processamento igual a 32, 64 e 128 chips/bit, em banda passante.	67

Lista de Tabelas

3.1	Valor médio do módulo da correlação cruzada para sequências aleatórias, exato e aproximação.	31
4.1	Caso ilustrativo dos bits transmitidos por 5 usuários e da respectiva detecção para as amostras rotuladas como confiáveis, sendo o limiar de confiabilidade igual a 0,5, onde C indica as amostras confiáveis e NC representa as amostras não-confiáveis. . .	43
4.2	Possíveis sequências de bits que terão as métricas calculadas pelo detector sub-ótimo usando (3.3)	43

Glossário

AWGN	-	Ruído Aditivo Gaussiano Branco - <i>Additive White Gaussian Noise</i>
BPSK	-	Modulação em Fase por Chaveamento Binário - <i>Binary Phase Shifting Keying</i>
CDMA	-	Múltiplo Acesso por Divisão de Códigos - <i>Code Division Multiple Access</i>
CMF	-	Filtro Casado Convencional - <i>Conventional Matched Filter</i>
DS	-	Sequência Direta - <i>Direct Sequence</i>
FDMA	-	Múltiplo Acesso por Divisão de Frequências - <i>Frequency Division Multiple Access</i>
FH	-	Salto em Frequência - <i>Frequency Hooping</i>
MAI	-	Interferência de Múltiplo Acesso - <i>Multiple Access Interference</i>
PDF	-	Função Densidade de Probabilidade - <i>Probability Density Function</i>
RSR	-	Relação Sinal-Ruído
SS	-	Espalhamento Espectral - <i>Spread Spectrum</i>
TDMA	-	Múltiplo Acesso por Divisão de Tempo - <i>Time Division Multiple Access</i>

Lista de Símbolos

$\Delta P_b(L)$	- Acréscimo de probabilidade de erro de bit em função de um limiar de confiabilidade L
y_k	- Amostra do sinal do k -ésimo usuário
A_k	- Amplitude do sinal transmitido pelo k -ésimo usuário
$s_{k,i}$	- Amplitude do i -ésimo <i>chip</i> do k -ésimo usuário
b_k	- Bit de informação do k -ésimo usuário
\hat{b}_k	- Bit de informação estimado do k -ésimo usuário
\mathcal{C}	- Complexidade em número de cálculos
$\rho_{i,k}$	- Correlação cruzada entre as sequências de espalhamento i e k
N_0	- Densidade espectral de potência do ruído
S	- Densidade espectral de potência do sinal
σ_x	- Desvio padrão de uma variável aleatória x
E_b	- Energia por bit
ϕ_k	- Fase do k -ésimo usuário
$p(t)$	- Formato de pulso em banda base
f_o	- Frequência da portadora
$Q(x)$	- Função de distribuição cumulativa complementar gaussiana
p_x	- Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória x
G	- Ganho de processamento
T_c	- Intervalo de duração de um <i>chip</i>
T_b	- Intervalo de duração de um bit de informação
B	- Largura de banda do sinal de informação
W	- Largura de banda alocada a um sistema
L	- Limiar de confiabilidade
\mathbf{A}	- Matriz $K \times K$ das amplitudes recebidas dos usuários
μ_x	- Média da variável aleatória x
\mathbf{R}	- Matriz de correlações cruzadas normalizadas
\mathbf{H}	- Matriz de correlações cruzadas recebidas pelo detector
$\Omega(\hat{\mathbf{b}})$	- Métrica do vetor de bits estimados
K_{NC}	- Número de amostras não-confiáveis
n_{erros}	- Número de erros obtidos nas simulações de Monte Carlo

N	- Número de realizações independentes em uma simulação de Monte Carlo
M	- Número de símbolos do alfabeto a ser transmitido
K	- Número de usuários ativos no sistema
p_t	- Potência de transmissão de um usuário
$\overline{P_b}$	- Probabilidade de erro de bit média
P_b	- Probabilidade de erro de bit
$P_{C b_k=\pm 1}(L)$	- Probabilidade de ocorrência de amostras confiáveis dado a polaridade do bit transmitido em função de um limiar de confiabilidade L
$P_{NC b_k=\pm 1}(L)$	- Probabilidade de ocorrência de amostras não-confiáveis dado a polaridade do bit transmitido em função de um limiar de confiabilidade L
$P_{NC}(L)$	- Probabilidade de ocorrência de amostras não-confiáveis em função de um limiar de confiabilidade L
$n(t)$	- Ruído gaussiano branco adicionado ao sinal na entrada do receptor
$n_k(t)$	- Ruído aditivo gaussiano branco do k -ésimo usuário
$s_k(t)$	- Sequência de espalhamento do k -ésimo usuário
$\hat{\mathbf{b}}$	- Sequência de bits estimados no detector
\mathbf{b}	- Sequência de bits enviados
$y_k(T_b)$	- Sinal na saída do filtro casado do k -ésimo usuário
$r(t)$	- Sinal recebido no receptor
$x_k(t)$	- Sinal transmitido pelo k -ésimo usuário
R_b	- Taxa de informação em bits/s
R_c	- Taxa de transmissão do sinal em chips/s
$\overline{ \rho }$	- Valor médio do módulo da correlação cruzada
σ_x^2	- Variância de uma variável aleatória x
\mathbf{y}	- Vetor com as amostras na saída do banco de filtros casados

Capítulo 1

Introdução

A comunicação nada mais é do que o ato de se transferir uma informação de um ponto a outro. Entretanto, este ato faz parte da vida humana desde seu advento. Na pré-história, as informações se referiam à perigos iminentes e à caça, sendo basicamente transmitidas de pessoa-a-pessoa ou ainda através de desenhos rupestres. Tempos depois, o homem descobriu que codificando as mensagens por sinais visuais através de fumaça ou por sinais sonoros através de tambores poderia aumentar a velocidade e a abrangência da comunicação. Com o passar do tempo, os métodos de comunicação evoluíram de forma extraordinária, chegando ao apogeu onde as informações podem ser transmitidas simultaneamente a qualquer distância da Terra. Atualmente a comunicação está presente em nossas vidas em diversas formas, seja nos celulares em nossos bolsos, nos rádios e televisores em nossos quartos, nos computadores com acesso à Internet em nosso trabalho e residência ou ainda nos jornais que compramos todas as manhãs. Estes e outros inúmeros meios de comunicação que possuímos são capazes de nos prover uma forma de comunicação extremamente rápida a qualquer ponto do globo.

Não se resta a mínima dúvida de que a comunicação se tornou uma necessidade humana. Com isso, cabe à evolução tecnológica e aos profissionais da área aperfeiçoar cada vez mais os meios e métodos de comunicação, para cada vez mais se poder ter acesso à maior quantidade de informações precisas e exatas.

Neste âmbito, o objetivo de um engenheiro ao projetar um sistema de comunicação é garantir o transporte de uma mensagem de informação da fonte de interesse através de um canal ruidoso até o usuário de destino, localizado na outra extremidade deste canal. Além disso, este procedimento deve obedecer a alguns critérios de confiabilidade e eficiência, sujeito ainda a algumas limitações, no que se diz respeito à potência de transmissão, disponibilidade de banda no canal, custo para a construção deste projeto, entre outros.

No caso dos sistemas de comunicação digital, a confiabilidade do projeto é expressa em termos de probabilidade de erro de bit. Obviamente, quanto menor a probabilidade de erro de bit, maior será

a confiabilidade de um sistema de comunicação. Por este motivo, métodos com elevada eficiência na transmissão e recepção dos sinais de informação devem ser empregados na prática.

Uma área na qual houve um desenvolvimento tecnológico surpreendente e altamente expansivo nos últimos anos, dentro das comunicações digitais, refere-se aos sistemas multiusuário, que são serviços de telecomunicações que envolvem o acesso simultâneo de múltiplos usuários a um mesmo meio de transmissão, sendo a telefonia celular um destes serviços. Neste caso, são utilizadas as chamadas técnicas de múltiplo acesso, onde a técnica de múltiplo acesso por divisão de códigos, CDMA (*Code Division Multiple Access*), é a utilizada ao longo do trabalho.

Concentrando-se nesta sub-área das comunicações digitais, encontram-se as técnicas de detecção de sinais em sistemas multiusuário. Nesta área específica, a técnica que apresenta o melhor desempenho, em termos de probabilidade de erro de bit, é a técnica definida como detecção multiusuário ótima. Entretanto, devido à uma alta complexidade prática oriunda à esta técnica, torna-se difícil seu emprego em sistemas reais de comunicação CDMA. Com isso, a proposta de uma técnica sub-ótima de detecção multiusuário é apresentada nesta dissertação, sendo que os resultados obtidos com esta técnica, também em termos de probabilidade de erro de bit, foram satisfatórios, visto ainda que a limitação inerente à técnica de detecção multiusuário ótima foi consideravelmente atenuada.

1.1 Visão Geral do Trabalho

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos da comunicação digital. Dentre estes conceitos estão as diversas técnicas de múltiplo acesso, a descrição do modelo de canal AWGN e ainda uma análise com maior ênfase nos sistemas de comunicação CDMA. Neste último, são apresentados os conceitos de espalhamento espectral, controle de potência e ainda uma modelagem matemática de um sistema CDMA, tanto em banda base, quanto em banda passante. Por fim, é abordado a técnica de simulação utilizada na dissertação e ainda uma breve descrição do filtro casado.

No capítulo 3 é iniciado o estudo da detecção multiusuário. Neste capítulo é apresentada a melhor técnica de detecção multiusuário possível, já citada anteriormente, chamada de ótima. O funcionamento de seu algoritmo, suas principais características e suas limitações são citadas. É ainda apresentada uma modelagem matemática com o objetivo de encontrar uma expressão genérica e simplista de desempenho referente à esta técnica de detecção, suprida ainda com alguns resultados para se verificar a expressão obtida.

Já no capítulo 4 se encontra o ápice desta dissertação, referente ao algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo proposto. Sua completa descrição, funcionamento e particularidades são apresentados. Uma modelagem matemática para a obtenção das equações teóricas de desempenho e com-

plexidade deste algoritmo sub-ótimo, assim como os vários resultados obtidos através de simulação, tanto em banda base como em banda passante, são também apresentados neste capítulo.

No capítulo 5 são discutidas as conclusões do trabalho implementado, bem como seus principais resultados e contribuições. Ainda neste capítulo são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

No Apêndice A são apresentados os cálculos utilizados para a obtenção da equação de desempenho aproximada do detector multiusuário ótimo através da modelagem matemática realizada no capítulo 3.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo, inicialmente são revisados alguns conceitos básicos tais como as técnicas de múltiplo acesso existentes. Posteriormente, são revisados o modelo de canal AWGN, utilizado na presente dissertação e ainda algumas características dos sistemas de múltiplo acesso de divisão por códigos. Além disso, um sistema CDMA básico é modelado, tanto em banda base, quanto em banda passante, no qual o sinal recebido pelo usuário de interesse é expresso em função dos dados transmitidos por todos os usuários e do ruído que corrompe o canal aditivo gaussiano considerado. Por fim, são revisados alguns conceitos básicos que serão utilizados durante as simulações do algoritmo de detecção multiusuário proposto e ainda uma breve descrição do detector convencional, denominado filtro casado.

2.1 Técnicas de Múltiplo Acesso

Múltiplo acesso é uma técnica onde vários usuários devem dividir a utilização de um canal de comunicação. Por motivos óbvios é desejável que em um sistema de múltiplo acesso, o compartilhamento dos recursos do canal sejam realizados sem comprometer a integridade dos sinais dos usuários do sistema com interferências em excesso [1]. Com isso, apresentamos os principais métodos de controle de acesso a um canal de comunicação, que permitem uma maior eficiência no uso dos recursos do sistema diante de um elevado número de usuários.

2.1.1 FDMA

O esquema mais antigo implementado em sistemas sem fio é denominado múltiplo acesso por divisão em frequência (FDMA - *Frequency Division Multiple Access*). Basicamente uma largura de banda W no espectro de frequência é alocada ao sistema e subdividida em n canais de comunicação, cada um com largura de banda adequada ao serviço oferecido. Para um sistema com número

de usuários maior que n , o sistema alocará dinamicamente os canais para os usuários ativos e os usuários em excesso enfrentam uma situação de bloqueio no sistema. Este sistema de comunicação normalmente exige a alocação de "bandas de guarda", para se tentar reduzir a interferência entre canais adjacentes, já que a filtragem para separação entre os usuários não é perfeita.

2.1.2 TDMA

Com a digitalização das diversas fontes de informação, surge a técnica de múltiplo acesso por divisão temporal (TDMA - *Time Division Multiple Access*), que consiste na formatação de conjuntos de bits em quadros transmitidos ao longo do tempo. Cada quadro possui n intervalos de tempo (*timeslots*) destinados à informação de um usuário, que neste curto período de tempo, ocupa uma determinada faixa espectral. Para um sistema com número de usuários maior que n , o sistema alocará dinamicamente os *timeslots* aos usuários ativos e os usuários em excesso que desejam efetuar uma comunicação enfrentam a situação de bloqueio no sistema. Este sistema de comunicação normalmente exige a aplicação de circuitos de sincronismo e recuperação de relógio (*clock*) para o acesso correto do *timeslot* desejado.

2.1.3 CDMA

Em um sistema de múltiplo acesso de divisão por códigos (CDMA - *Code Division Multiple Access*) a cada usuário está associado uma sequência pseudo-aleatória usada para espalhar a informação em uma banda do canal compartilhada por vários usuários. Portanto, para um receptor conseguir distinguir as informações, é necessário que ele conheça os códigos de espalhamento de cada usuário.

Na demodulação de cada sinal recebido, os sinais dos outros usuários do canal aparecem como interferência aditiva. O nível de interferência varia, dependendo do número de usuários ativos e de seus respectivos níveis de potência em um determinado instante de tempo. A maior vantagem dos sistemas de múltiplo acesso de divisão por códigos é sua capacidade em acomodar um número elevado de usuários.

2.1.4 Híbridos

As técnicas híbridas combinam as três técnicas abordadas anteriormente. São elas: FDMA/TDMA, FDMA/CDMA e TDMA/CDMA.

2.1.4.1 FDMA/TDMA

Na técnica híbrida FDMA/TDMA a faixa espectral disponível é dividida em sub-faixas, onde cada uma destas sub-faixas transporta a comunicação de um determinado número de usuários que compartilham esta sub-faixa em instantes de tempo distintos.

2.1.4.2 FDMA/CDMA

Na técnica híbrida FDMA/CDMA a faixa espectral disponível é dividida em sub-faixas, onde cada uma transporta a comunicação de um determinado número de usuários que compartilham esta sub-faixa ao mesmo tempo, porém utilizando sequências de espalhamento pseudo-aleatórias distintas.

2.1.4.3 TDMA/CDMA

Na técnica híbrida TDMA/CDMA cada célula utiliza uma sequência de espalhamento pseudo-aleatória comum a todos os usuários, sendo que em uma determinada célula a cada usuário é alocado um instante de tempo distinto dos demais para a realização da transmissão dos sinais.

2.2 Modelo de Canal

2.2.1 Canal AWGN

Entre a antena transmissora e a antena receptora, vários fenômenos ocorrem na transmissão de um sinal. Neste caso o canal de comunicação de rádio é o responsável por essas transformações, e pode ser visto como um filtro que atua no sinal transmitido. Este filtro é representado matematicamente por sua resposta impulsiva no domínio do tempo, ou por sua resposta em frequência. Em geral os efeitos provocados pelo canal são variantes no tempo e são indicados matematicamente por processos estocásticos, conferindo ao canal propriedades de um sistema linear variante no tempo.

O modelo mais simples de canal de rádio é aquele que considera que o sinal transmitido sofre perturbações dadas por adição de ruído. O processo estocástico do ruído é geralmente do tipo gaussiano, atuando em toda faixa de frequência considerada, o que caracteriza o modelo de canal do tipo ruído aditivo gaussiano branco (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*). Em um determinado instante de tempo, o processo estocástico torna-se uma variável aleatória x , cuja função densidade de probabilidade (PDF - *Probability Density Function*) é gaussiana e seu modelo matemático é dado por [2]:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (2.1)$$

onde μ_x e σ_x^2 são, respectivamente, a média e a variância da variável aleatória x .

2.3 Características de Sistemas CDMA

Nesta seção, apresentamos o conceito de espalhamento espectral e ainda o desenvolvimento passo-a-passo do sinal de informação, desde sua saída do aparelho do usuário até a sua decisão no lado receptor.

2.3.1 Espalhamento Espectral

A técnica de espalhamento espectral (SS - *Spread Spectrum*) foi originalmente desenvolvida em meados do século XX com objetivos militares, visando principalmente resistência às interferências propositas e ainda a garantia de privacidade nas transmissões de mensagens possivelmente interceptadas por ouvintes indesejáveis. Devido ao desempenho satisfatório apresentado, esta técnica passou a ser utilizada comercialmente [3].

Sinais espalhados em frequência têm, como principal característica, uma taxa de transmissão R_c muito maior que a taxa de informação R_b , em bits/s. O fator de expansão, $G = R_c/R_b$, é conhecido como ganho de processamento. O espalhamento espectral é feito através de sequências, que são independentes da sequência de informação, onde cada usuário possui uma sequência específica. Uma sequência de espalhamento é uma sucessão periódica de símbolos de curta duração (*chips*) com comportamento similar a um comportamento aleatório dentro do período de um bit. O inverso de R_c , denotado por T_c , define o intervalo de duração de cada chip. Se definirmos $T_b = 1/R_b$ como o intervalo de duração de um bit de informação, o ganho de processamento pode ser expresso também por:

$$G = \frac{R_c}{R_b} = \frac{T_b}{T_c} \quad (2.2)$$

Na prática, a razão T_b/T_c é um número inteiro, e representa o número de chips por bit de informação. A uma taxa de transmissão R_c está associada uma largura de banda W e a uma taxa de bits do sinal de informação R_b está associada uma largura de banda B . Com isso, o ganho de processamento pode ser também expresso em função das larguras de banda dos sinais, $G = W/B$, conforme pode ser observado na fig. 2.1, que ilustra o conceito de espalhamento espectral no domínio da frequência. Pode-se observar que a densidade espectral de potência do sinal, S , espalhado em frequência é reduzida de G .

A banda larga e a baixa densidade espectral de potência inerentes aos sinais espalhados asseguram sua resistência para lidar com os altos níveis de interferência típico de transmissões digitais em canais

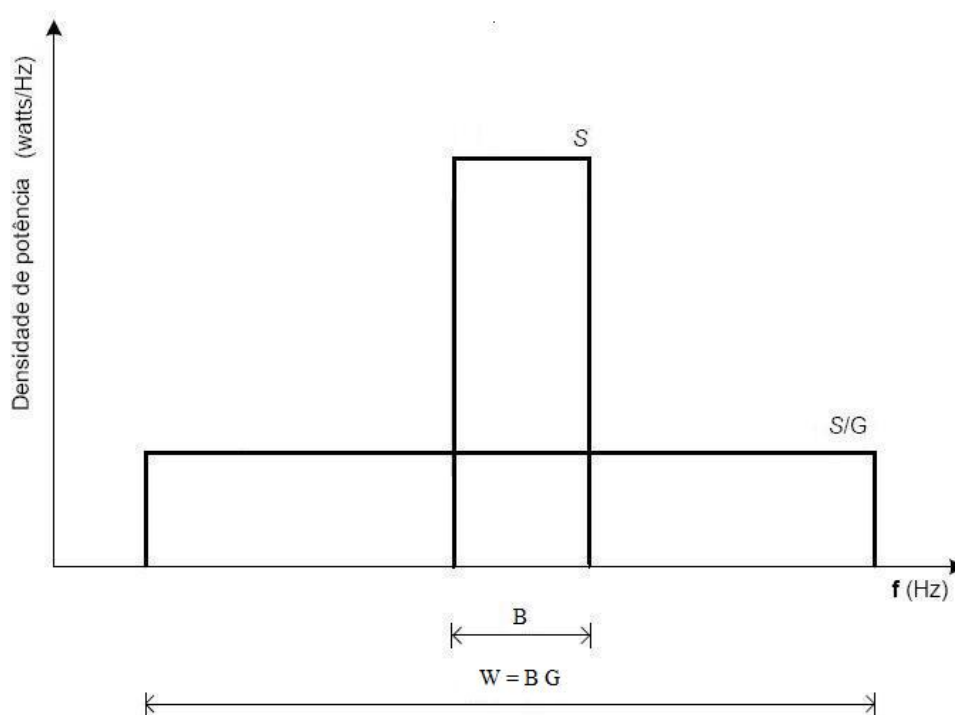


Fig. 2.1: Densidade espectral de potência S do sinal antes e depois do espalhamento.

de rádio com acesso múltiplo. Além disso, a pseudo-aleatoriedade e o reduzido nível de potência dos sinais fazem que os mesmos assemelhem-se ao ruído, dificultando que receptores que não conheçam a sequência de espalhamento efetuem a demodulação.

Existem dois tipos principais de espalhamento espectral: saltos em frequência (FH - *Frequency Hopping*) e sequência direta (DS - *Direct Sequence*).

O espalhamento espectral por saltos em frequência é uma técnica na qual a sequência de símbolos de informação bipolar modula, normalmente em frequência, uma portadora que possui sua frequência variável em função de uma sequência pseudo-aleatória. Se esta sequência possui taxas muitas vezes superior à taxa de bits de informação, tem-se a implementação de um sistema FH-SS rápido. Se, ao contrário, a sequência possui taxa inferior à taxa de bits originais, tem-se a implementação do sistema FH-SS lento.

Já a técnica de espalhamento espectral por sequência direta, DS-SS, multiplica a sequência de símbolos de informação bipolar $\{\pm 1\}$ por uma sequência de espalhamento, também bipolar ou, equivalentemente, a sequência de símbolos de informação binária $\{0, 1\}$ é somada (módulo 2) a uma sequência PN também binária. O resultado da operação anterior modula uma portadora senoidal, normalmente em fase. Depois de modulado, o sinal é transmitido pelo canal de comunicação. Na recepção, é demodulado, para a obtenção do sinal em banda base, e contraído espectralmente para a obtenção do sinal original, através da multiplicação da mesma sequência utilizada no espalhamento

espectral.

Para ambos os tipos de espalhamento espectral, a recepção se torna impossível para receptores que não conhecem o código de espalhamento de seu respectivo transmissor.

2.3.2 Controle de Potência

O controle de potência é essencial para o correto funcionamento de um sistema CDMA. Devido aos diversos usuários compartilharem a mesma banda de transmissão utilizando sequências de espalhamento, cada usuário é visto pelos outros usuários como uma interferência. A potência de cada usuário individual, deve ser então cuidadosamente controlada para que a integridade das informações dos demais usuários não sofra uma interferência dispensável.

Considerando uma célula CDMA composta por apenas dois usuários, sendo que um usuário esteja muito próximo da estação rádio-base e o outro usuário mais distante desta e considerando ainda uma comunicação no enlace reverso (*uplink*), ou seja, do aparelho móvel para a estação rádio-base, caso não haja nenhum controle de potência, ambos usuários irão transmitir suas informações com uma potência fixa p_t . Entretanto, devido à diferença na distância entre os usuários e a estação rádio-base, a potência recebida do usuário mais próximo será muito maior do que a potência recebida do outro usuário. Com isso, o usuário que está mais próximo desfrutará de uma qualidade de transmissão maior, devido ao seu nível de potência em relação ao outro usuário. Esta particularidade dos sistemas de múltiplo acesso com espalhamento espectral é conhecida como efeito perto-longe (*near-far effect*) [4].

O controle de potência é então aplicado a estes sistemas para garantir que a potência dos sinais que chegam à estação rádio-base sejam similares. Caso estes sinais cheguem à estação rádio-base com a mínima relação sinal-ruído requerida, este controle de potência ainda assegura uma maximização da capacidade do sistema [5]. Isto se deve ao fato de que a capacidade em número atendimentos simultâneos de uma estação rádio-base é limitada a um valor igual à potência média recebida multiplicada por um certo número de aparelhos móveis ativos no sistema. Com isso, trabalhando-se com a menor relação sinal-ruído requerida possível, maior será o número de atendimentos concretizados por esta estação rádio-base. No desenvolvimento dos resultados desta dissertação foi considerado um controle de potência perfeito aos sinais que chegam à estação rádio-base.

2.3.3 Sistema de Comunicações CDMA em Banda Base

Nesta seção será realizada uma modelagem matemática com o intuito de obter as expressões correspondentes às amostras de sinais que entram no dispositivo de decisão, na qual, esta análise será realizada para o caso em banda base.

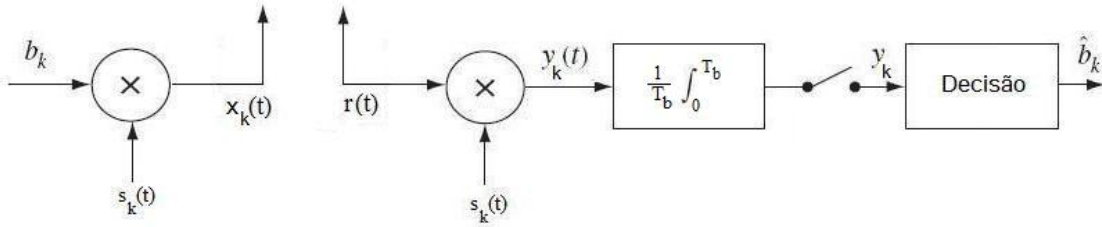


Fig. 2.2: Transmissor e Receptor de um sistema CDMA em banda base do k -ésimo usuário.

A partir da fig. 2.2 observa-se o diagrama do transmissor e do receptor de um sistema CDMA para um usuário k qualquer. A sequência de informação a ser enviada pelo usuário k é multiplicada pela sequência de espalhamento $s_k(t)$ que irá realizar o espalhamento espectral através da técnica sequência direta (DS). Com isso, o sinal é enviado e já no lado do receptor este sinal, agora corrompido pelo ruído e interferência, é contraído espectralmente através da multiplicação pela mesma sequência de espalhamento utilizada no transmissor e sincronizada à sequência do sinal recebido. Este sinal passa então por um integrador, que após amostrá-lo no instante de tempo T_b , obtém a amostra de sinal que será utilizada nos cálculos do algoritmo de decisão.

Supondo uma célula com K usuários, tem-se que o sinal transmitido pelo k -ésimo usuário é dado por:

$$x_k(t) = A_k b_k s_k(t) \quad \text{para } 1 \leq k \leq K \quad (2.3)$$

onde A_k é a amplitude do sinal transmitido do k -ésimo usuário, b_k é o bit de informação do k -ésimo usuário transmitido, $s_k(t)$ é a sequência de espalhamento do k -ésimo usuário. A sequência de espalhamento considerada é do tipo aleatória, composta de G chips, que é dada por:

$$s_k(t) = \sum_{i=1}^G s_{k,i} p(t - (i-1)T_c) \quad (2.4)$$

cujas amplitudes assumem $s_{k,i} = \pm 1$ com mesma probabilidade, para $i = 1, \dots, G$ e $p(t)$ é o formato do pulso em banda base.

Já no lado receptor, o sinal obtido é composto pela soma dos sinais de todos os usuários, adicionados de um ruído aditivo gaussiano branco, referente ao ruído térmico, que contamina o sinal recebido e que é suposto possuir densidade espectral igual a $N_0/2$. Sendo assim, o sinal obtido é dado matematicamente por:

$$r(t) = \sum_{i=1}^K A_i b_i s_i(t) + n(t) \quad (2.5)$$

O sinal recebido é então contraído espectralmente, sendo este multiplicado pela sequência local do k -ésimo usuário sincronizada com a sequência recebida. Após a passagem pelo integrador, o sinal é amostrado no instante de tempo T_b . A partir da amostra será tomada uma decisão sobre o bit mais provável de ter sido transmitido. Sendo assim, a amostra do k -ésimo usuário, na entrada do dispositivo de decisão é dada matematicamente por:

$$y_k(T_b) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} r(t) s_k(t) dt \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.6), tem-se que:

$$y_k(T_b) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \sum_{i=1}^K A_i b_i s_i(t) s_k(t) dt + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) s_k(t) dt \quad (2.7)$$

Expandido o somatório para termos em que $i = k$ e $i \neq k$, tem-se:

$$\begin{aligned} y_k(T_b) = & \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} A_k b_k s_k^2(t) dt + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i b_i s_i(t) s_k(t) dt + \\ & \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) s_k(t) dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

O primeiro termo de (2.8) corresponde ao sinal transmitido pelo k -ésimo usuário que chega ao receptor do k -ésimo usuário. O segundo termo corresponde ao sinal transmitido pelos demais usuários, $(K - 1)$, que chegam ao receptor do k -ésimo usuário. O terceiro termo corresponde ao ruído térmico adicionado no receptor do k -ésimo usuário.

O primeiro termo, que corresponde ao sinal desejado pelo k -ésimo usuário, pode ser escrito como:

$$y_k^{(1)}(T_b) = A_k b_k \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} s_k^2(t) dt \quad (2.9)$$

Como se considera uma condição com sincronismo perfeito, sendo ainda que as amplitudes assumem os valores de ± 1 e o pulso $p(t)$ é retangular, a função de auto-correlação da sequência de espalhamento considerada tem a seguinte propriedade:

$$\frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} s_k^2(t) dt = 1 \quad (2.10)$$

Com isso, o termo de sinal desejado na saída do filtro casado pode ser ainda descrito como:

$$y_k^{(1)}(T_b) = A_k b_k \quad (2.11)$$

O segundo termo de (2.8), que corresponde à interferência de múltiplo acesso (MAI - *Multiple*

Access Interference) dos outros $(K - 1)$ usuários no k -ésimo usuário, é dado por:

$$y_k^{(2)}(T_b) = \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i b_i \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t) s_k(t) dt \quad (2.12)$$

Pode-se definir em (2.12) a função de correlação cruzada entre a sequência do i -ésimo usuário com a sequência do k -ésimo usuário, como:

$$\rho_{i,k} = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t) s_k(t) dt \quad (2.13)$$

Conforme dito anteriormente, a sequência de espalhamento considerada é do tipo aleatória. Sabe-se que tais sequências apresentam correlação cruzada que é uma função discreta, dada por:

$$\rho(i) = \frac{G - 2i}{G}, \quad i = 0, 1, \dots, G. \quad (2.14)$$

e a probabilidade de ocorrência de (2.14), por sua vez, é uma função binomial dada por:

$$P\left(\rho(i) = \frac{G - 2i}{G}\right) = \frac{1}{2^G} \binom{G}{i} \quad (2.15)$$

Sendo assim, pode-se escrever (2.12) como:

$$y_k^{(2)}(T_b) = \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i b_i \rho_{i,k} \quad (2.16)$$

Idealmente o valor de $\rho_{i,k}$ deveria ser igual a 0, pois as funções de correlação cruzada fornecem um indício da quantidade de interferência que o usuário que utiliza a sequência $s_i(t)$ introduz no receptor do usuário que utiliza a sequência $s_k(t)$. Porém, devido ao fato destas sequências não serem perfeitamente ortogonais entre si e também devido à dificuldade de sincronismo em chip, geralmente o valor de $\rho_{i,k} \neq 0$.

Por fim, o terceiro e último termo de (2.8), correspondente ao efeito do ruído aditivo na saída do receptor, é dado por:

$$y_k^{(3)}(T_b) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) s_k(t) dt \quad (2.17)$$

que pode ser simplesmente representado por:

$$y_k^{(3)}(T_b) = n_k(T_b) \quad (2.18)$$

dado que $n_k(T_b)$ é a amostra de ruído na saída do filtro casado do k -ésimo usuário.

Pode-se então, obter uma equação simplificada, substituindo-se (2.11), (2.16) e (2.18) em (2.8):

$$y_k(T_b) = A_k b_k + \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i b_i \rho_{i,k} + n_k(T_b) \quad (2.19)$$

Dado que foi obtida a expressão referente à amostra do k -ésimo usuário, se o número de usuários K for grande, então a variável de decisão apresentará uma função densidade de probabilidade gaussiana, de modo que, o conhecimento apenas de sua média e variância, permitirá caracterizá-la.

Desta forma, iniciando o cálculo da média a partir de (2.19), dentre os três termos, apenas o primeiro possui média não nula. O segundo termo possui média nula, pois como os chips assumem amplitudes ± 1 com probabilidade $1/2$ e são independentes entre si, tem-se que $\overline{\rho_{i,k}} = 0$. Já o terceiro termo possui média nula, pois $\overline{n_k(t)} = 0$. Assim,

$$\mu_y = \overline{y_k(T_b)} = A_k b_k \quad (2.20)$$

Quanto à variância, o primeiro termo por ser determinístico possui variância nula. Com isso, através do segundo e terceiro termos serão realizados os cálculos para obtenção da variância deste caso em banda base. A variância do segundo termo é igual ao seu valor quadrático médio, e correspondente à potência da MAI, ou seja:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = \sum_{i=1, i \neq k}^K \sum_{i'=1, i' \neq k}^K A_i A_{i'} \overline{b_i b_{i'} \rho_{i,k} \rho_{i',k}} \quad (2.21)$$

Quando $i = i'$, tem-se que:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i^2 \overline{\rho_{i,k}^2} \quad (2.22)$$

onde $\overline{b_i^2} = b_i^2 = 1$.

Considerando um controle de potência e sincronismo perfeitos, usando (2.14) e (2.15), pode-se mostrar para sequências aleatórias que $\overline{\rho_{i,k}^2} = 1/G$. Supondo ainda que a interferência de múltiplo acesso para um elevado número de usuários é gaussiana, tem-se que a variância referente ao termo da MAI, corresponde à:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = A^2 \frac{K-1}{G} \quad (2.23)$$

onde conforme esperado, a potência da MAI é proporcional ao número de interferentes na célula.

Analisando-se agora a variância referente ao terceiro termo, que corresponde à potência do ruído, tem-se que:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \overline{n_k(t)n_k(t')} s_k(t)s_k(t') dt dt' \quad (2.24)$$

Sabendo que a função de correlação do ruído aditivo branco é dada por $\overline{n_k(t)n_k(t')} = \frac{N_0}{2} \delta(t - t')$, com isso:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = \frac{N_0}{2T_b^2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \delta(t - t') s_k(t)s_k(t') dt dt' \quad (2.25)$$

Usando que $\int_0^{T_b} \delta(t - t') s_k(t') dt' = s_k(t)$, tem-se:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = \frac{N_0}{2T_b^2} \int_0^{T_b} s_k^2(t) dt = \frac{N_0}{2T_b} \quad (2.26)$$

onde utilizou-se (2.10).

Com isso, sabendo que os processos estocásticos de interferência e ruído são independentes, tem-se que a potência total é dada pela soma das potências da MAI e do ruído aditivo. Assim,

$$\sigma_y^2 = \overline{y_k^2(T_b)} = A^2 \frac{K - 1}{G} + \frac{N_0}{2T_b} \quad (2.27)$$

Sabendo que $E_b = A^2 T_b$, então a variância pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma_y^2 = A^2 \left(\frac{N_0}{2E_b} + \frac{K - 1}{G} \right) \quad (2.28)$$

2.3.4 Sistema de Comunicações CDMA em Banda Passante

Tendo sido realizada toda a análise de um sistema de comunicação CDMA em banda base, a mesma análise em banda passante será realizada. Assim como na fig. 2.2, a fig. 2.3 ilustra o transmissor e o receptor de um sistema CDMA para um usuário k qualquer, adicionados agora de um bloco modulador, que translada o espectro para a frequência da portadora que irá transmitir a informação pelo espaço livre e um bloco demodulador, que tem a função inversa do modulador, ou seja, translada o espectro novamente para banda base. Além desta inserção, é importante salientar o uso de um ganho de duas vezes no lado receptor, que tem o intuito de manter a amplitude das amostras recebidas com os mesmos padrões do caso em banda base.

Sendo assim, considerando uma célula com K usuários, o sinal transmitido pelo k -ésimo usuário é dado por:

$$x_k(t) = A_k b_k s_k(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad \text{para } 1 \leq k \leq K \quad (2.29)$$

onde A_k , b_k e $s_k(t)$ foram definidos anteriormente, f_0 é a frequência da portadora e ϕ_k é a fase

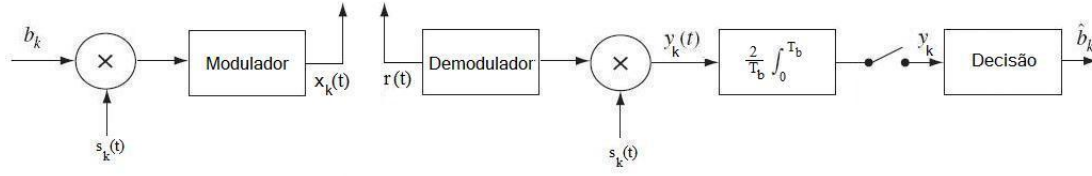


Fig. 2.3: Transmissor e Receptor de um sistema CDMA em banda passante do k -ésimo usuário.

aleatória referente à portadora do k -ésimo usuário. Já o sinal recebido nos terminais do receptor é dado por:

$$r(t) = \sum_{i=1}^K A_i b_i s_i(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) + n(t) \quad (2.30)$$

O sinal recebido primeiramente é multiplicado pela portadora local do k -ésimo usuário sincronizada com a portadora recebida para que o espectro do sinal recebido volte para a banda base.

O sinal, já em banda base, é então multiplicado pela sequência local do k -ésimo usuário sincronizada com a sequência recebida, que irá realizar a contração espectral. Após a passagem pelo integrador, o sinal é amostrado. Sendo assim, a amostra de sinal do k -ésimo usuário é dada por:

$$y_k(T_b) = \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} r(t) s_k(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) dt \quad (2.31)$$

Substituindo (2.30) em (2.31), e expandindo o somatório para termos em que $i = k$ e $i \neq k$, tem-se que:

$$\begin{aligned} y_k(T_b) &= \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} A_k b_k s_k^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \phi_k) dt \\ &+ \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i b_i s_i(t) s_k(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) dt \\ &+ \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) s_k(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

A partir de (2.32), tem-se que o primeiro termo corresponde ao sinal desejado pelo k -ésimo usuário, o segundo termo corresponde ao sinal transmitido pelos demais usuários que chegam ao receptor do k -ésimo usuário e o terceiro termo corresponde ao ruído térmico adicionado ao receptor do k -ésimo usuário.

Afim de simplificar (2.32), uma análise termo a termo pode ser feita, conforme realizado anteriormente para o caso em banda base. Com isso, o primeiro termo pode ser escrito como:

$$y_k^{(1)}(T_b) = A_k b_k \quad (2.33)$$

onde utilizou-se (2.10) referente à função de auto-correlação da sequência de espalhamento. Foi ainda considerado que $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$ e que $\int_0^{T_b} \cos(a + b) dt = 0$, ou seja, a portadora com o dobro da frequência não passa pelo integrador.

Já o segundo termo, que corresponde à interferência de múltiplo acesso dos outros $(K - 1)$ usuários, pode ser descrito como:

$$y_k^{(2)}(T_b) = \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i b_i \cos(\phi_i - \phi_k) \rho_{i,k} \quad (2.34)$$

onde novamente foi considerada a relação trigonométrica $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$, onde o termo com a portadora com o dobro da frequência não passa pelo integrador. Foi utilizada também (2.13) para definir a função de correlação cruzada.

O terceiro termo de (2.32), correspondente ao efeito do ruído na saída do receptor, pode ser descrito como:

$$y_k^{(3)}(T_b) = \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) s_k \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) dt = 2n_k(T_b) \quad (2.35)$$

Substituindo-se então (2.33), (2.34) e (2.35) em (2.32), tem-se a expressão referente à amostra de sinal do k -ésimo usuário:

$$y_k(T_b) = A_k b_k + \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i b_i \cos(\phi_i - \phi_k) \rho_{i,k} + 2n_k(T_b) \quad (2.36)$$

Assim como realizado na análise em banda base, os valores da média e da variância para o caso em banda passante serão obtidos. Iniciando pelo cálculo da média, a partir de (2.36), dos três termos apenas o primeiro termo possui média não nula. Assim,

$$\mu_y = \overline{y_k(T_b)} = A_k b_k \quad (2.37)$$

Já para a variância, o primeiro termo por ser determinístico possui variância nula. A variância referente ao segundo termo, correspondente à potência da MAI é dada por:

$$\begin{aligned} \overline{y_k^2(T_b)} &= \sum_{i=1, i \neq k}^K \sum_{i'=1, i' \neq k}^K A_i A_{i'} \overline{b_i b_{i'} \rho_{i,k} \rho_{i',k} \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) \cos(2\pi f_0 t + \phi_{i'})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq k}^K \sum_{i'=1, i' \neq k}^K A_i A_{i'} \overline{b_i b_{i'} \rho_{i,k} \rho_{i',k} \cos(\phi_{i'} - \phi_i)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde usou-se que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b)$ e que $\int_0^{T_b} \cos(a+b)dt = 0$.

A portadora cossenoidal tem valor médio nulo, a menos que $i = i'$. Assim,

$$\overline{y_k^2(T_b)} = A^2 \frac{K-1}{2G} \quad (2.39)$$

onde considerou-se $\overline{b_i^2} = b_i^2 = 1$ e $\overline{\rho_{i,k}^2} = 1/G$, além de sincronismo e controle de potência perfeitos. Assim como no caso em banda base, a potência da MAI é proporcional ao número de interferentes na célula.

A variância do terceiro termo, que corresponde à potência do ruído, é dada por:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = \frac{4}{T_b^2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \overline{n_k(t)n_k(t')} s_k(t)s_k(t') \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) \cos(2\pi f_0 t + \phi_{i'}) dt dt' \quad (2.40)$$

Com isso, a variância referente ao terceiro termo é:

$$\overline{y_k^2(T_b)} = \frac{4N_0}{2T_b^2} \int_0^{T_b} s_k^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \phi_i) dt = \frac{N_0}{T_b} \quad (2.41)$$

onde usou-se (2.10) e que $\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$ e que $\int_0^{T_b} \cos(a+b)dt = 0$.

Assim como considerado em banda base, devido aos processos estocásticos de interferência e ruído serem independentes, a variância total será a soma das variâncias dos dois termos encontrados. Sendo assim, sabendo que $E_b = (A^2 T_b)/2$, tem-se que a variância para este caso em banda passante é:

$$\sigma_y^2 = A^2 \left(\frac{N_0}{2E_b} + \frac{K-1}{2G} \right) \quad (2.42)$$

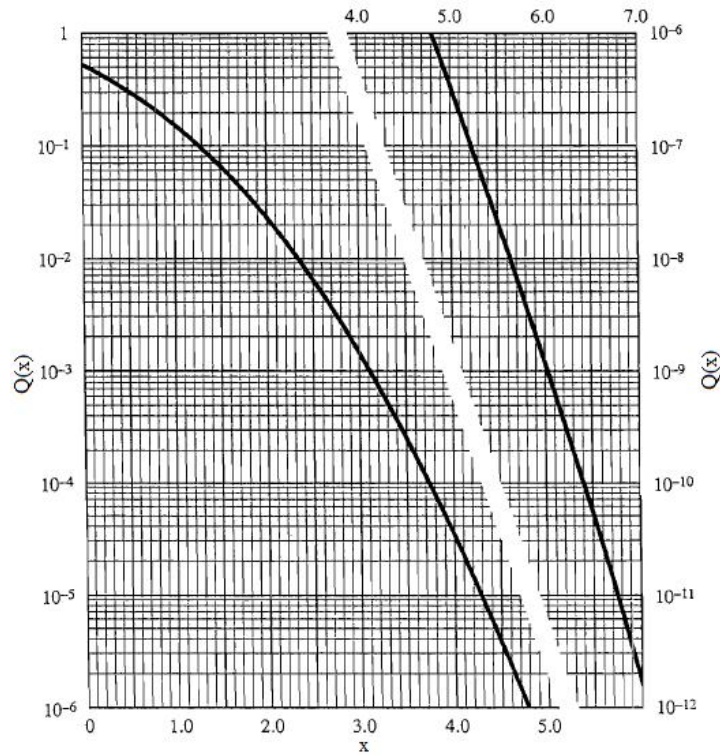
2.4 Função $Q(x)$

A função de distribuição cumulativa complementar Gaussiana, mais conhecida como Função $Q(x)$, é muito utilizada nas análises empregadas em comunicações digitais. Esta função é definida matematicamente por, [7]:

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad (2.43)$$

Apesar da integral definida em (2.43) não admitir uma solução com fórmula fechada, as propriedades analíticas desta função foram amplamente estudadas, visto sua importância em muitas das análises de probabilidade de erro em processamento de sinais.

A fig. 2.4 ilustra o comportamento da função $Q(x)$ para valores de x acima de zero. Sendo assim, observa-se que a função $Q(x)$ é monotonicamente decrescente.

Fig. 2.4: Valores da função $Q(x)$ para $x > 0$.

Esta função define as probabilidades referente à cauda direita da distribuição de uma variável aleatória gaussiana X com média zero e variância unitária, $X \sim N(0, 1)$. Portanto,

$$P[X > x] = Q(x) \quad (2.44)$$

A partir de (2.43), podemos calcular alguns pontos bem definidos referente à função $Q(x)$, tais como:

$$\begin{aligned} Q(-\infty) &= 1 \\ Q(0) &= 0,5 \\ Q(\infty) &= 0 \\ Q(-x) &= 1 - Q(x) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Porém, quando se utiliza valores diferentes de média e variância, tais como μ_x e σ_x^2 , a probabilidade de $X > x$, é definida em termos da função $Q(x)$ como:

$$P[X > x] = Q\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (2.46)$$

onde σ_x é o desvio padrão da variável aleatória x .

Devido à características intrínsecas ao *software* Matlab, na análise de sistemas de comunicações e sistemas estatísticos, ao invés do emprego da função $Q(x)$, utiliza-se a chamada função de erro complementar, $\text{erfc}(x)$, definida como:

$$\text{erfc}(x) = \int_x^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad (2.47)$$

onde existe uma relação direta entre (2.43) e (2.47), dada por:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.48)$$

e de forma recíproca,

$$\text{erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \quad (2.49)$$

Na implementação do algoritmo proposto por esta dissertação, a relação apresentada em (2.48) será amplamente utilizada.

2.5 Simulações de Monte Carlo

Os primeiros geradores eletro-mecânicos de números aleatórios foram inicialmente utilizados para simular jogos de azar e devido a este fato, técnicas de simulação que utilizam geradores de números aleatórios são conhecidos como simuladores de Monte Carlo, em referência ao local que hospeda os cassinos mais famosos do mundo. Este método é utilizado quando não for possível determinar a probabilidade de erro de bit analiticamente, ou ainda quando se estiver investigando a validade de expressões analíticas para o desempenho de novas estruturas ou sistemas de comunicação. O método de simulação de Monte Carlo é simplesmente um conjunto de sequências de Bernoulli, onde são computados os números de sucessos ou erros dividido pelo número de realizações [8], conforme:

$$P_e \cong \frac{n_{\text{erros}}}{N} \quad (2.50)$$

onde N é o número de experimentos independentes e n_{erros} é o número de erros obtidos nestes experimentos.

Quando $N \rightarrow \infty$ a razão que define P_e torna-se uma igualdade, porém sabe-se que computacionalmente adotar o número de realizações tendendo ao infinito é inviável. Portanto, emprega-se um número de realizações N tal que conduza a um resultado dentro de um intervalo de confiança esperado. Nas simulações de Monte Carlo empregadas nesta dissertação, utiliza-se um número de erros igual à 100 erros por ponto, isto é, para uma P_e esperada de 10^{-4} , por exemplo, exige-se a realização de 10^6 experimentos por ponto.

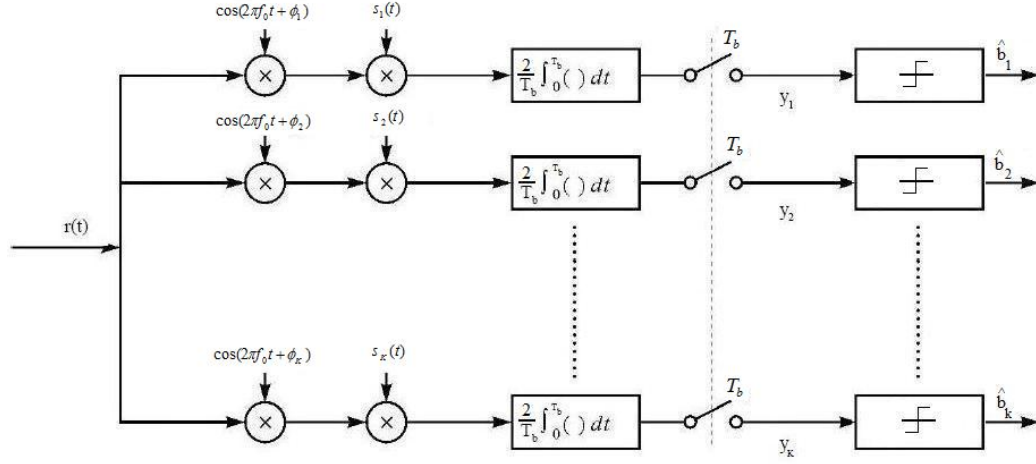


Fig. 2.5: Estrutura do detector convencional para o caso em banda passante.

2.6 Detector Convencional

O esquema mais simples para se demodular sinais CDMA é através do uso de filtros casados convencionais (CMF - *Conventional Matched Filter*). Na detecção com o filtro casado, o receptor, para um dado usuário, correlaciona o sinal recebido com a sua sequência de espalhamento, realiza a amostragem no instante de tempo T_b e transfere esta amostra para o dispositivo de decisão. Para uma modulação BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) a decisão é tomada de acordo com a polaridade da amostra, através de dispositivos de decisão abrupta, da seguinte forma:

$$\hat{b}_k = \text{sgn}(y_k) \quad (2.51)$$

A fig. 2.5 ilustra a estrutura do filtro casado para o caso em banda passante. A mesma estrutura se aplica ao caso em banda base, porém com a ausência do fator multiplicativo referente à portadora.

O desempenho deste detector depende das propriedades de correlação entre as sequências de espalhamento. Com isso, requer-se que o valor da auto-correlação das sequências de espalhamento seja muito maior que a correlação cruzada entre elas. Sendo assim, uma vez que as sequências são projetadas para apresentarem baixas correlações cruzadas, o efeito da interferência dos outros usuários sobre o k -ésimo usuário, representados pelo segundo termo de (2.19) e (2.36), é fortemente reduzido. Evidentemente, se as sequências forem ortogonais, a interferência causada pelos outros usuários é eliminada, $\rho_{i,k} = 0$, e o detector convencional apresenta desempenho ótimo. Por outro lado, se uma ou mais sequências não forem ortogonais à sequência do usuário desejado, a interferência dos outros usuários pode se tornar excessiva se a potência dos seus sinais for suficientemente elevada com relação à potência do sinal de interesse.

A operação realizada pelo detector convencional pode também ser explicada no domínio da frequência. Todos os sinais chegam ao receptor espalhados na frequência por um fator G , o que equivale a reduzir a densidade espectral de potência do sinal de banda estreita, conforme é ilustrado na fig. 2.1. Após multiplicar o sinal recebido pela sequência de espalhamento do usuário k , o sinal referente a este usuário volta a ficar contraído em sua banda de informação original. Os outros sinais, contudo, permanecem espalhados no domínio da frequência. A operação de integração funciona então como um filtro passa-baixa com frequência de corte igual a $1/T_b$. Nessa faixa de frequência, o sinal de interesse está com sua potência restabelecida e os sinais interferentes com suas potências reduzidas por um fator proporcional ao ganho de processamento.

O filtro casado é a melhor técnica de detecção para canais AWGN. Entretanto, seu desempenho degrada-se ao usá-lo em canais com interferência de múltiplo acesso, devido ao fato deste detector negligenciar a presença de outros usuários no canal. Desta forma, não há compartilhamento de informações entre os usuários e o detector processa os sinais dos usuários individualmente.

O desempenho em termos da probabilidade de erro de bit de um detector convencional em um canal AWGN síncrono, para um sistema DS-CDMA com modulação BPSK é dado por [9]:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\mu_y^2}{\sigma_y^2}}\right) \quad (2.52)$$

Com isso, através de (2.52) pode-se chegar a expressão referente à probabilidade de erro de bit do detector convencional, tanto em banda base, como em banda passante, através da média e a variância respectiva a cada caso. Sendo assim, utilizando (2.20) e (2.28), a probabilidade de erro de bit para o caso em banda base é definida como:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{1}{\frac{N_0}{2E_b} + \frac{(K-1)}{G}}}\right) \quad (2.53)$$

Já para o caso em banda passante, através de (2.37) e (2.42), tem-se que a probabilidade de erro de bit é dada por:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2}{\frac{N_0}{E_b} + \frac{(K-1)}{G}}}\right) \quad (2.54)$$

onde observa-se para ambos os casos que o aumento, tanto no número de usuários, como no nível de ruído presente no sistema, afeta negativamente a probabilidade de erro de bit do detector convencional.

No caso particular, quando apenas um único usuário está ativo no sistema, tanto (2.53), quanto (2.54) se reduz à:

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (2.55)$$

Capítulo 3

Detector Multiusuário Ótimo

No âmbito da detecção multiusuário, a detecção conhecida como ótima é aquela que dentre todas existentes, apresenta a menor probabilidade de erro de símbolo possível para canais com interferência e ruído. Devido a este fato, os resultados gerados por este detector podem servir como referência para análise de algoritmos multiusuário sub-ótimos.

Neste capítulo serão abordados as principais características do detector multiusuário ótimo, assim como o funcionamento de tal algoritmo. É proposta uma expressão limitante que determina o comportamento deste detector ótimo em canais de múltiplo acesso corrompidos por interferência e ruído aditivo gaussiano branco. Resultados experimentais e analíticos, dispostos em gráficos, foram introduzidos a fim de ilustrar o comportamento da expressão limitante proposta.

3.1 Algoritmo de Detecção Ótimo

O algoritmo ótimo é aquele que, dentre todos os algoritmos de detecção multiusuário possíveis, fornece a menor probabilidade de erro de símbolo [10]. Considerando um sistema CDMA síncrono, composto por K usuários ativos, temos que o sinal que chega na entrada do receptor definido em (2.5) em banda base ou (2.30) em banda passante, é composto pela soma dos sinais enviados pelos K usuários, acrescidos do ruído aditivo gaussiano branco introduzido pelo receptor. A partir deste sinal recebido o detector ótimo estimará os bits transmitidos de todos usuários, $\hat{\mathbf{b}} = [\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_K]^T$, onde $[\dots]^T$ corresponde à transposição de vetores e matrizes. Inicialmente a análise para o caso em banda base será realizada, sendo posteriormente estendida para caso em banda passante.

3.1.1 Análise em Banda Base

Sabe-se que o receptor multiusuário ótimo é o receptor de distância mínima. Em um caso particular, onde todos os possíveis vetores de bits enviados \mathbf{b} sejam equiprováveis, o receptor de distância mínima é ótimo segundo o critério da probabilidade máxima a-posteriori (MAP - *Maximum a-Posteriori Probability*). Caso todos os possíveis vetores \mathbf{b} não sejam equiprováveis, o receptor de distância mínima é ótimo no sentido de máxima verossimilhança (ML - *Maximum Likelihood*) [11].

Sendo assim, o detector de distância mínima irá comparar o vetor recebido, $r(t)$, com todas as possíveis combinações do vetor de bits estimados $\hat{\mathbf{b}}$ para encontrar a sequência de bits que está mais próxima (ou de forma equivalente, menos distante), em termos do quadrado da distância euclidiana, do ponto definido pelas componentes de $r(t)$. A obtenção da estimativa do vetor de bits transmitidos é a partir de $\Omega(\hat{\mathbf{b}})$, também conhecido como métrica, que é definida matematicamente, como:

$$\Omega(\hat{\mathbf{b}}) = \min_{\hat{b}_i} \left\{ \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \left[r(t) - \sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i s_i(t) \right]^2 dt \right\} \quad (3.1)$$

onde supõe-se que as estimativas de amplitude são perfeitas e que se conhece a sequência de espalhamento de cada usuário.

Expandindo o termo quadrático e realizando as simplificações dos termos não-relevantes, chega-se à:

$$\Omega(\hat{\mathbf{b}}) = \max_{\hat{b}_i} \left[\frac{2}{T_b} \sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i \int_0^{T_b} r(t) s_i(t) dt - \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \left(\sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i s_i(t) \right)^2 dt \right] \quad (3.2)$$

Observa-se que em (3.1) a métrica corresponde ao valor \hat{b}_i que minimiza a equação, ao passo que em (3.2), o valor \hat{b}_i que maximiza a função é aquele escolhido como métrica e portanto, será o bit do i -ésimo usuário decidido pelo detector multiusuário ótimo. Com isso, substituindo (2.6) em (3.2), pode-se expressar a métrica em função das amostras de sinais que entram no dispositivo de decisão, da seguinte forma:

$$\Omega(\hat{\mathbf{b}}) = \max_{\hat{b}_i} \left[2 \sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i y_i - \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \left(\sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i s_i(t) \right)^2 dt \right] \quad (3.3)$$

A estrutura que implementa o receptor ótimo em banda base, está ilustrada na fig. 3.1, onde $r(t)$ é o vetor de sinais obtido na entrada do receptor. Após a passagem da informação de cada usuário pelo seu respectivo filtro casado, as amostras, representadas por y_k , entram no dispositivo de decisão ótimo, que realiza os cálculos representados por (3.3). Após estes cálculos, obtém-se na saída a sequência de bits decididos $\hat{\mathbf{b}}$.

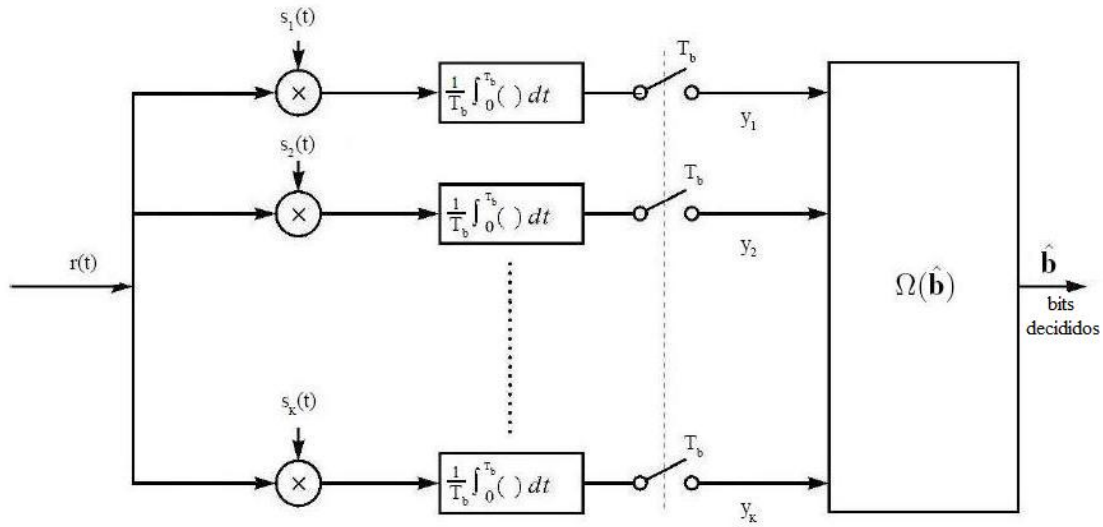


Fig. 3.1: Estrutura do detector multiusuário ótimo para transmissão síncrona em banda base.

3.1.2 Análise em Banda Passante

Já a análise da expressão referente a métrica para o caso em banda passante, sofre uma breve mudança em relação ao caso em banda base, visto a presença do termo da frequência e fase da portadora. Sendo assim, a métrica para o caso em banda passante é definida como:

$$\Omega(\hat{\mathbf{b}}) = \max_{\hat{b}_i} \left[\frac{4}{T_b} \sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i \int_0^{T_b} r(t) s_i(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) dt - \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} \left(\sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i s_i(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) \right)^2 dt \right] \quad (3.4)$$

onde foi considerado um ganho de duas vezes na recepção do sinal, com o intuito de manter os resultados com os mesmos padrões do caso em banda base, no que se diz respeito a amplitude das amostras recebidas. Substituindo (2.31) em (3.4), tem-se a expressão da métrica em função das amostras que entram no dispositivo de decisão ótimo:

$$\Omega(\hat{\mathbf{b}}) = \max_{\hat{b}_i} \left[2 \sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i y_i - \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} \left(\sum_{i=1}^K A_i \hat{b}_i s_i(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) \right)^2 dt \right] \quad (3.5)$$

A estrutura referente ao receptor ótimo em banda passante está ilustrada na fig. 3.2, onde o vetor de sinais $r(t)$ é primeiramente demodulado para então seguir ao filtro casado e posteriormente para o dispositivo de decisão ótimo, que realiza os cálculos representados por (3.5).

O detector convencional, para o caso síncrono, exige apenas o conhecimento das sequências de

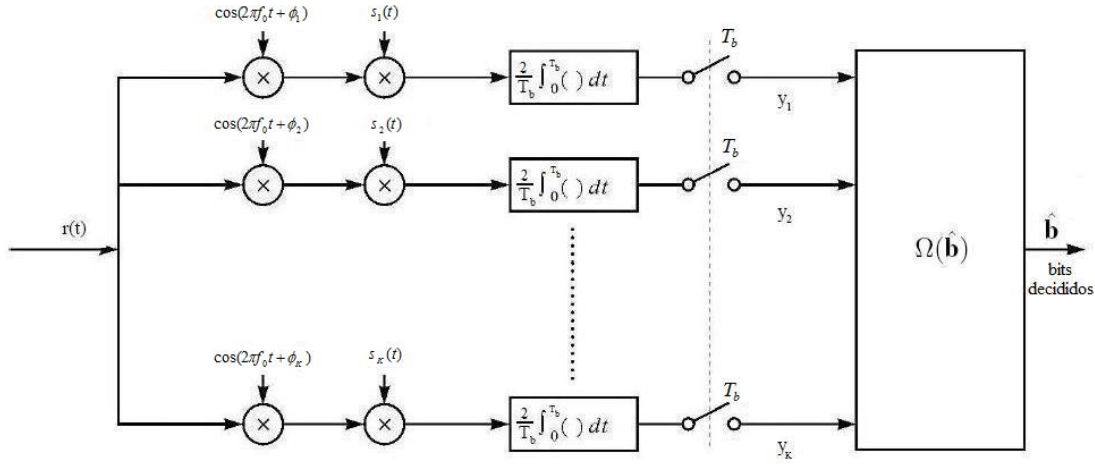


Fig. 3.2: Estrutura do detector multiusuário ótimo para transmissão síncrona em banda passante.

espalhamento de cada usuário ativo no sistema [12]. Já o detector multiusuário ótimo, além das sequências de espalhamento de cada usuário, requer o conhecimento das amplitudes e fases de todos os usuários ativos. Estes dados são conhecidos ou estimados pelo detector, a fim de utilizá-los nos cálculos de seu processamento.

Nos cálculos realizados tanto em (3.3) quanto em (3.5) se concentra a causa da pouca viabilidade de utilização deste detector na prática. Esta baixa viabilidade está relacionada com o número de cálculos que são necessários para se obter o resultado da métrica, pois existem M^K possíveis sequências de símbolos a serem comparadas com as amostras recebidas, onde M é o número de símbolos do alfabeto a ser transmitido e K o número de usuários ativos no sistema, para então se escolher aquela que apresenta maior métrica em (3.3) ou (3.5), em banda base ou banda passante, respectivamente. Mesmo considerando um sistema com alfabeto binário, conforme é utilizado neste trabalho, a complexidade em número de cálculos é exponencial com o número de usuários ativos no sistema, da forma 2^K . Levando-se em consideração que os sistemas atuais trabalhem com um número bastante elevado de usuários ativos, o número de cálculos a ser realizado por este algoritmo de detecção cresce exponencialmente, diminuindo a viabilidade de seu uso em sistemas reais.

Sendo assim, podemos realizar uma analogia entre os pontos fortes e os pontos fracos apresentados pelo detector multiusuário ótimo, frente ao detector convencional. Os pontos favoráveis ao detector ótimo são a resistência apresentada ao efeito perto/longe, como também a minimização da probabilidade de erro de símbolo, que o classifica como ótimo. Já o ponto desfavorável se refere justamente à complexidade exponencial com o número de usuários no número de cálculos necessários para realização da detecção.

Apesar da complexidade apresentada por este detector, o desempenho dele é o melhor dentre a

classe de detectores multiusuários existentes, sendo seus resultados de grande valia na comparação e análise de outros detectores multiusuários, denominados sub-ótimos. Devido a importância inerente ao desempenho deste detector multiusuário ótimo, visto que, não exista nenhuma expressão fechada de sua probabilidade de erro de bit média, uma tentativa de se encontrar uma expressão aproximada para este caso é apresentada a seguir.

3.2 Modelagem Matemática da Expressão do Detector Ótimo

A partir do sinal recebido, dado por (2.5) será iniciado o processo de obtenção de uma expressão limitante geral da probabilidade de erro de bit média para o detector multiusuário ótimo. Inicialmente apenas a abordagem para dois usuários será realizada devido a simplicidade matemática oferecida, com a possibilidade de se extrapolar este resultado para uma expressão envolvendo K usuários.

3.2.1 Dois Usuários

O sinal que chega ao receptor referente à dois usuários em um canal síncrono é:

$$r(t) = A_1 b_1 s_1(t) + A_2 b_2 s_2(t) + n(t) \quad (3.6)$$

Sendo $y_k(T_b)$ a amostra de sinal encontrada na saída do filtro casado do k -ésimo usuário, definida em (2.19), tem-se que para 2 usuários, estas amostras correspondem, respectivamente à:

$$\begin{aligned} y_1(T_b) &= A_1 b_1 + A_2 b_2 \rho + n_1(T_b) \\ y_2(T_b) &= A_1 b_1 \rho + A_2 b_2 + n_2(T_b) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde, ρ é definido em (2.13), e

$$n_k(T_b) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(t) s_k(t) dt \quad (3.8)$$

O detector multiusuário ótimo realiza a detecção conjunta dos bits transmitidos, onde a regra de decisão ótima seleciona o par (\hat{b}_1, \hat{b}_2) que minimiza a métrica do detector de distância mínima, ou maximiza (3.3). Assim,

$$\Omega(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \max_{\hat{b}_1, \hat{b}_2} \left[A_1 \hat{b}_1 y_1 + A_2 \hat{b}_2 y_2 - A_1 A_2 \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rho - \frac{A_1^2}{2} - \frac{A_2^2}{2} \right] \quad (3.9)$$

No Apêndice A, são apresentados cálculos referentes à expressão do limitante superior da probabilidade de erro de bit, tanto para este caso com dois usuários onde (3.7) e (3.9) são utilizados nos cálculos, quanto para diferentes número de usuários. Para a obtenção de tal limitante superior,

considera-se que sempre haja um erro na decisão do bit referente ao primeiro usuário. Sendo assim, o limitante superior obtido em (A.11), para o caso com dois usuários corresponde a:

$$P_b \leq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1+\rho)}\right) \quad (3.10)$$

A partir da expressão de probabilidade de erro de bit encontrada, pode-se observar algumas particularidades. Se $\rho = 0$, os dois últimos termos de (3.10) tornam-se iguais e muito menores que o primeiro termo, já que a função $Q(x)$ é exponencialmente decrescente. Sabe-se que neste caso particular, não há interferência e o desempenho para a expressão do detector ótimo tem como resultado o primeiro termo de (3.10), e por esta razão esta expressão é uma desigualdade. Quando $\rho > 0$, ou seja, positivo, o segundo termo é dominante em relação ao terceiro, e o inverso ocorre quando ρ é negativo. Através destas considerações, podemos simplificar (3.10) da seguinte forma:

$$P_b \leq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-|\rho|)}\right) \quad (3.11)$$

onde elimina-se o menor termo.

Para se obter a probabilidade de erro de bit média, é necessário efetuar a média em ambos os lados de (3.11), conforme:

$$\overline{P_b} \leq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-|\rho|)}\right) \quad (3.12)$$

Porém, no lado direito de (3.12), esta média é apenas efetuada em relação à correlação cruzada ρ . Para a realização desta operação, utiliza-se uma desigualdade, chamada desigualdade de Jensen, que tem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &\geq f(\overline{x}) && \text{monotonicamente crescente} \\ \overline{f(x)} &\leq f(\overline{x}) && \text{monotonicamente decrescente} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aplicando-se então a desigualdade de Jensen, em (3.12), verifica-se que esta é monotonicamente crescente com $|\rho|$. Com isso, a probabilidade de erro de bit média é dada por:

$$\overline{P_b} \geq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-\overline{|\rho|})}\right) \quad (3.14)$$

Portanto, fica evidente a necessidade de se encontrar o valor médio do módulo da correlação cruzada ρ , ou seja, $\overline{|\rho|} = \sum_i |\rho_i| P(\rho_i)$. Sendo assim, utilizando (2.14) e (2.15), o valor médio do módulo de ρ deve ser calculado da seguinte forma:

G	$ \overline{\rho} $	$0,783/\sqrt{G}$
2	0,5000	0,5536
4	0,3750	0,3915
6	0,3125	0,3196
8	0,2730	0,2768
10	0,2460	0,2476
16	0,1960	0,1957
32	0,1400	0,1384
64	0,0990	0,0979
100	0,0796	0,0783
1000	0,0252	0,0248

Tab. 3.1: Valor médio do módulo da correlação cruzada para sequências aleatórias, exato e aproximação.

$$|\overline{\rho}| = \sum_{i=0}^{G/2} 2 \frac{G-2i}{G} \frac{1}{2^G} \binom{G}{i} \quad (3.15)$$

Com estes dados pode-se definir a expressão limitante exata da probabilidade de erro de bit média para o detector multiusuário ótimo, que utiliza sequências de espalhamento aleatórias, dada para dois usuários por:

$$\overline{P_b} \geq Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) + \sum_{i=0}^G \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{4 \frac{E_b}{N_0} \left(1 - \frac{G-2i}{G}\right)}\right) \frac{1}{2^G} \binom{G}{i} \quad (3.16)$$

Apesar de ser uma expressão limitante exata, o desenvolvimento de (3.16) não apresenta forma fechada. Entretanto, foram calculados alguns valores médios do módulo de ρ , que são mostrados na tab. 3.1, onde por meio de técnicas de ajuste de regressão aplicadas aos resultados obtidos para os altos valores de ganho de processamento da tab. 3.1 se verifica que $|\overline{\rho}|$ decresce com \sqrt{G} . Com base nestes resultados é possível obter uma aproximação razoável para este valor médio, considerando valores de $G > 10$:

$$|\overline{\rho}| \cong \frac{0,783}{\sqrt{G}} \quad (3.17)$$

onde o uso de tal aproximação gera um erro quadrático médio próximo a 0,1%, o que foi verificado em um *software* próprio para ajustes de curvas.

Com isso, substituindo (3.17) em (3.14), obtém-se a nova expressão referente ao limitante inferior da probabilidade de erro de bit média para dois usuários, em função apenas da relação sinal-ruído e do ganho de processamento, dada por:

$$\bar{P}_b \geq Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{0,783}{\sqrt{G}}\right)}\right) \quad (3.18)$$

Ao longo da análise para a obtenção de (3.18), foram realizadas algumas aproximações, sendo que a aproximação dada por (3.17) limitou a utilização deste resultado apenas para altos valores de ganho de processamento.

3.2.2 Três Usuários

Para chegar à expressão do limitante inferior da probabilidade de erro de bit média do detector multiusuário ótimo, outros casos com mais usuários devem ser analisados para observar-se o comportamento das expressões obtidas, para então tentar definir uma expressão genérica. Sendo assim, o próximo caso a ser analisado considera 3 usuários ativos no sistema. O sinal $r(t)$ recebido para 3 usuários é dado por:

$$r(t) = \sum_{i=1}^3 A_i b_i s_i(t) + n(t) \quad (3.19)$$

Conforme visto anteriormente, o detector multiusuário ótimo seleciona os bits $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ que minimizam a métrica do detector de distância mínima, de acordo com (3.1). Novamente recorrendo aos cálculos obtidos no Apêndice A, desta vez referente ao caso com 3 usuários, a partir de (A.41), temos que a expressão limitante da probabilidade de erro de bit é igual a:

$$\begin{aligned} P_b \leq & Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1 - \rho)}\right) + Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1 + \rho)}\right) \\ & + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}(1 - 2\rho)}\right) + \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right)}\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sabendo que a função $Q(x)$ é uma função monotonicamente decrescente, percebe-se que o quarto e o quinto termos de (3.20) são muito menores que o segundo e terceiro termos, que por sua vez são bem menores que o primeiro termo. Como os valores contribuídos pelo quarto e quinto termos são insignificantes frente aos demais termos da expressão, pode-se realizar uma considerável aproximação, truncando-se (3.20) em seus três primeiros termos, conforme:

$$P_b \leq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1 - \rho)}\right) + Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1 + \rho)}\right) \quad (3.21)$$

Fazendo uma analogia entre (3.10) e (3.21) percebe-se que os termos que compõe as expressões

são semelhantes, apresentando uma discrepância apenas nos fatores multiplicativos que acompanham tais termos. Sendo assim, considerando válidas as aproximações realizadas para dois usuários, inclusive (3.17), tem-se que o limitante inferior da probabilidade de erro de bit média para o caso de três usuários, aplicado apenas para altos valores de ganho de processamento, é dada por:

$$\overline{P_b} \geq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{0,783}{\sqrt{G}}\right)}\right) \quad (3.22)$$

3.2.3 Quatro Usuários

Visto que foi possível obter uma expressão do limitante inferior da probabilidade de erro de bit média tanto para dois, como para três usuários, e sendo que estas possuem termos comuns, assim como realizado anteriormente, tenta-se obter a expressão do limitante inferior da probabilidade de erro de bit média para quatro usuários. Desta forma, o sinal recebido é definido como:

$$r(t) = \sum_{i=1}^4 A_i b_i s_i(t) + n(t) \quad (3.23)$$

O detector multiusuário ótimo seleciona os bits $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4)$ que minimizam a métrica do detector de distância mínima, de acordo com (3.1). Com base nestes dados e utilizando a expressão (A.45) encontrada no Apêndice A, a expressão limitante da probabilidade de erro de bit para quatro usuários é:

$$\begin{aligned} P_b \leq & Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1 - \rho)}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1 + \rho)}\right) + \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}(1 + 2\rho)}\right) \\ & + \frac{9}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right)}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{8\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{3}{8}Q\left(\sqrt{8\frac{E_b}{N_0}(1 - \rho)}\right) + \frac{1}{8}Q\left(\sqrt{8\frac{E_b}{N_0}(1 + 3\rho)}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Analisando (3.24) e comparando-se ao caso de três usuários, três novos termos surgiram na expressão. Durante a análise e obtenção das expressões do limitante da probabilidade de erro de bit, percebe-se até o momento que cada vez que um usuário é adicionado, os novos termos que são acrescentados apresentam uma contribuição quantitativa cada vez menor, principalmente quando se eleva o valor da relação sinal-ruído. Sendo assim, devido às características da função $Q(x)$, (3.24) pode ser truncada em seus três primeiros termos, onde a expressão limitante da probabilidade de erro de bit para quatro usuários passa a ser:

$$P_b \leq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1+\rho)}\right) \quad (3.25)$$

onde observa-se que assim como na expressão (3.21) referente à três usuários, estes termos são similares ao caso de dois usuários, diferenciado apenas pelo fator multiplicativo de cada termo.

Adotando como válida as aproximações realizadas na análise do limitante inferior de probabilidade de erro de bit médio para dois usuários e aplicando-as em (3.25), tem-se que:

$$\overline{P}_b \geq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{0,783}{\sqrt{G}}\right)}\right) \quad (3.26)$$

3.2.4 K Usuários

Dado que obteve-se a expressão do limitante inferior da probabilidade de erro de bit média para dois, três e quatro usuários, respectivamente, pode-se através destas sugerir uma expressão geral para o detector ótimo em função do número de usuários, que será considerada como um limitante inferior deste detector. Sendo assim, analisando (3.18), (3.22) e (3.26) juntas, observa-se que todas expressões são compostas por dois termos, sendo que um destes termos é idêntico em todas as expressões. O outro termo por sua vez, também é similar em todos os casos, sendo diferenciado apenas pelo fator multiplicativo que o acompanha. Este termo multiplicativo apresenta um crescimento a cada usuário que é adicionado ao sistema e é igual a 1/2, 1 e 3/2 para dois, três e quatro usuários, respectivamente, apresentando um crescimento de 1/2 a cada usuário adicionado.

Com base neste fator multiplicativo e nas aproximações realizadas ao longo da análise, pode-se definir então um limitante inferior da probabilidade de erro de bit média para o detector multiusuário ótimo, em função do número de usuários:

$$\overline{P}_b \geq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \left(\frac{K-1}{2}\right)Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{0,783}{\sqrt{G}}\right)}\right) \quad (3.27)$$

onde K é o número de usuários ativo no sistema.

Dada esta generalização para o limitante inferior de probabilidade de erro de bit média do detector multiusuário ótimo para K usuários e sabendo que (3.16) é uma expressão limitante exata para o caso com apenas dois usuários, propõe-se então uma expressão limitante exata para o caso com K usuários, quando sequências de espalhamento do tipo aleatórias são utilizadas.

$$\overline{P}_b \geq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \sum_{i=0}^{G-1} \left(\frac{K-1}{2}\right)Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{G-2i}{G}\right)}\right) \frac{1}{2^G} \binom{G}{i} \quad (3.28)$$

3.3 Resultados Obtidos

Para validar (3.27) foram realizadas algumas análises para se comparar a probabilidade de erro de bit média desta expressão limitante, tanto com a expressão limitante exata, obtida em (3.28), como também para se comparar com algumas simulações do detector multiusuário ótimo. A probabilidade de erro de bit média é apresentada nos gráficos em função da relação sinal-ruído, onde alguns parâmetros, tais como, ganho de processamento e número de usuários, são variados para se poder analisar as particularidades apresentadas. Nesses gráficos, E_b/N_0 é referenciado como a relação sinal-ruído, visto que o emprego deste jargão na linguagem técnica da área é muito usual, apesar de literalmente relacionar as grandezas "energia por bit" com "densidade espectral de potência do ruído".

Sendo assim, na fig. 3.3 é apresentada a probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído, onde o ganho de processamento é igual a 16 chips/bit e o número de usuários ativos no sistema é de apenas 2. Através do gráfico percebe-se que a curva de simulação do detector multiusuário ótimo converge para a curva da expressão limitante exata, o que valida (3.28). Devido à complexidade inerente ao detector ótimo, a simulação para este caso foi realizada até uma relação sinal-ruído de 11 dB, visto que acima deste valor a complexidade computacional torna-se muito elevada. Percebe-se ainda que a expressão limitante de probabilidade de erro de bit média (3.27) acompanha a curva de simulação até um valor próximo de 9 dB, quando a curva de simulação se estabiliza em um valor próximo de 10^{-5} . O fato da curva referente à (3.27) não acompanhar a curva de simulação se deve ao fato de se estar utilizando um baixo valor de ganho de processamento, visto que a aproximação realizada por (3.17) limitou o uso de tal expressão apenas para altos valores de ganho de processamento e devido também à desigualdade de Jensen.

Pode-se ainda observar que a curva da equação limitante exata possui um patamar de probabilidade de erro de bit e isto se deve ao uso de sequências de espalhamento do tipo aleatórias. Sendo assim, para esta análise, que utiliza 16 chips aleatórios, tem-se 2^{16} possíveis sequências a serem escolhidas. Como não há coibição na escolha das sequências de espalhamento, sempre há, por menor que seja, a probabilidade de se escolher sequências idênticas, ou mesmo sequências que diferem entre si de apenas um ou dois chips, o que leva o valor da correlação cruzada (2.10) a ser relativamente alto. Com isso, para um ganho de processamento qualquer, a partir de uma certa relação sinal-ruído, esta correlação cruzada passa a influenciar no valor total da probabilidade de erro de bit, de forma a impedir a sua diminuição, mesmo com o aumento da relação sinal-ruído do sistema, o que justifica o patamar da curva (3.28) em um certo nível de probabilidade de erro de bit. Pode-se definir o valor aproximado do patamar encontrado na fig. 3.3 a partir de (3.28). Considerando o pior caso, ou seja, a correlação cruzada entre duas sequências de espalhamento é unitária ($i = 0$), e um alto valor de relação sinal-ruído, o segundo termo de (3.28) prevalece no valor total da probabilidade de erro de bit média. Com isso,

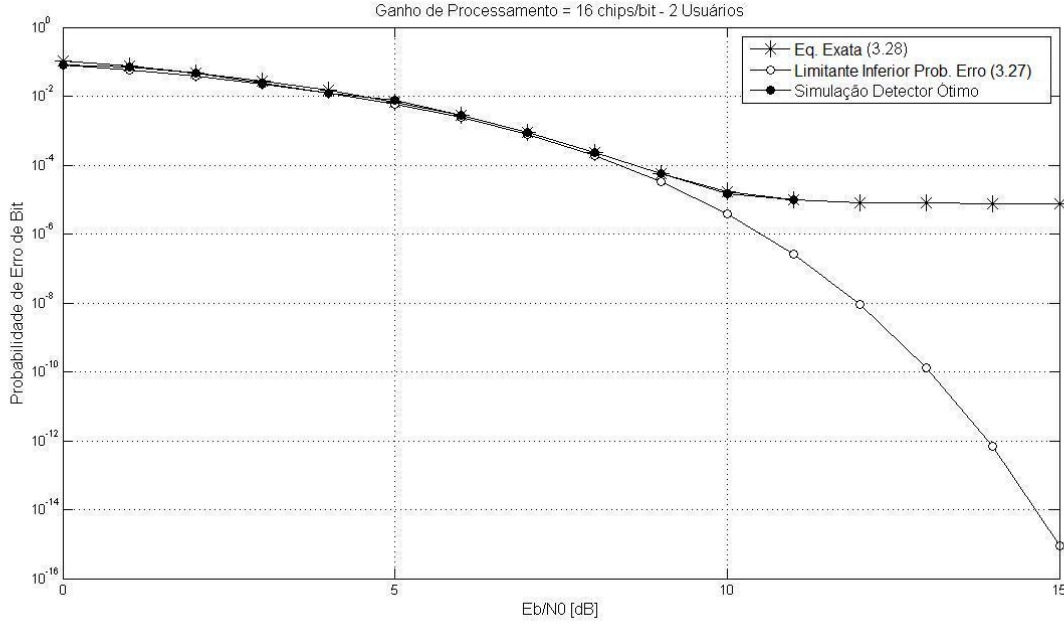


Fig. 3.3: Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 16 chips/bit com 2 usuários ativos.

$$\overline{P_b} \cong \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{4 \frac{E_b}{N_0} \left(1 - \frac{16-0}{16} \right)} \right) \frac{1}{2^{16}} \binom{16}{0} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2^{16}} = \frac{1}{2^{18}} = 3,8 \cdot 10^{-6}$$

onde o valor encontrado não é exatamente o valor referente ao patamar, visto que, há possibilidade de se escolher sequências que apresentem valores de correlação cruzada próximos de 1, que também influenciam severamente na perda de desempenho do detector ótimo.

A fig. 3.4 apresenta o mesmo caso da figura anterior, porém considerando 10 usuários. Assim como anteriormente, houve convergência entre a curva de simulação do detector ótimo e a curva referente a (3.28), sendo que a curva de simulação foi realizada até uma relação sinal-ruído de 10 dB devido à complexidade do algoritmo ótimo. Por outro lado, para este caso a expressão (3.27) apresenta uma aproximação razoável para a probabilidade de erro de bit média, porém, conforme dito anteriormente este limitante inferior restringe-se apenas a elevados ganhos de processamento.

Aumentando-se o ganho de processamento para 64 chips/bit e mantendo-se os 10 usuários no sistema, observa-se na fig. 3.5 que a curva referente ao limitante inferior, (3.27), acompanha a curva referente à expressão limitante exata (3.28) até 15 dB, quando a curva da expressão limitante exata se estabiliza próximo da probabilidade de erro de bit média igual a 10^{-18} . A curva referente à simulação do detector ótimo não foi obtida para este caso, visto sua complexidade computacional imposta.

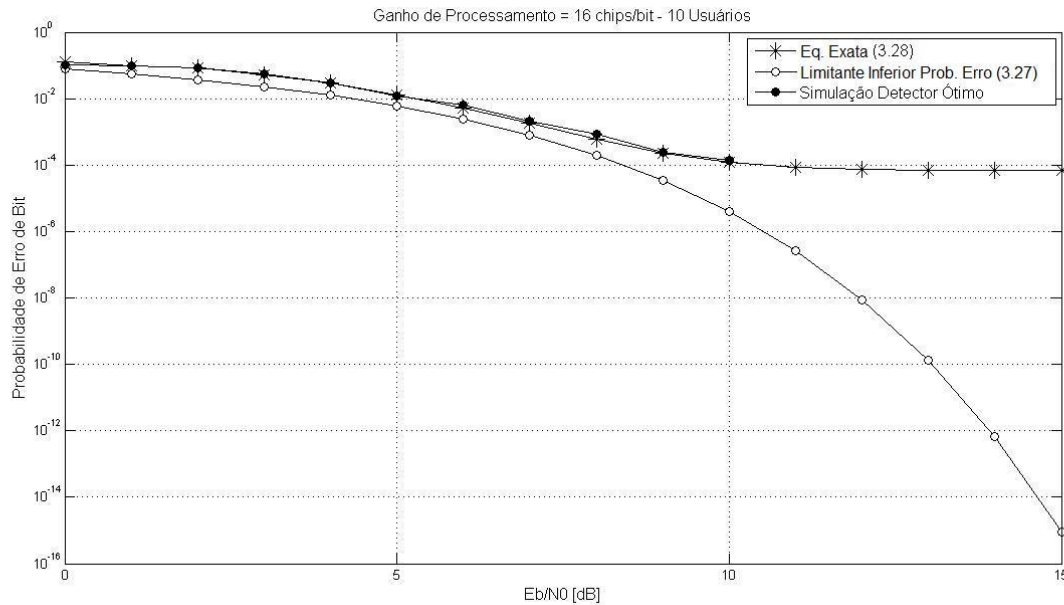


Fig. 3.4: Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 16 chips/bit com 10 usuários ativos.

Porém, devido ao fato de (3.28) retratar fielmente o comportamento da simulação, apenas esta será utilizada para ilustrar o desempenho real do detector multiusuário ótimo.

Conforme pode-se observar ainda na fig. 3.5, com uma relação sinal-ruído de 15 dB, a probabilidade de erro de bit média é próxima de 10^{-15} . Sabe-se que na prática probabilidades de erro de bit desta ordem são desprezíveis, sendo muito utilizado nas comunicações digitais probabilidades de erro de bit mínimas de 10^{-6} . Com isso, o limitante inferior da probabilidade de erro de bit média obtido em (3.27) pode ser considerado uma boa aproximação para sua utilização em casos práticos, quando se utilizam ganhos de processamentos elevados. De acordo como foi citado anteriormente, a curva referente à (3.28), se estabiliza em uma probabilidade de erro de bit próxima a 10^{-18} . Se comparado ao caso ilustrado na fig. 3.4, este valor é muito inferior ao valor encontrado quando se utiliza um ganho de processamento de 16 chips/bit. Isso se deve ao fato de que existem, para o caso que utiliza 64 chips/bit, 2^{64} possíveis sequências a serem escolhidas, o que diminui em altíssimo grau a probabilidade de se escolher sequências que apresentem altos valores de correlação cruzada entre si.

Assim como realizado anteriormente para 16 chips/bit, pode-se obter o valor aproximado do patamar encontrado na fig. 3.5. Considerando a escolha de sequências de espalhamento com correlações cruzadas unitárias ($i = 0$) e um alto valor de relação sinal-ruído, em (3.28) o segundo termo prevalece sobre o primeiro. Com isso,

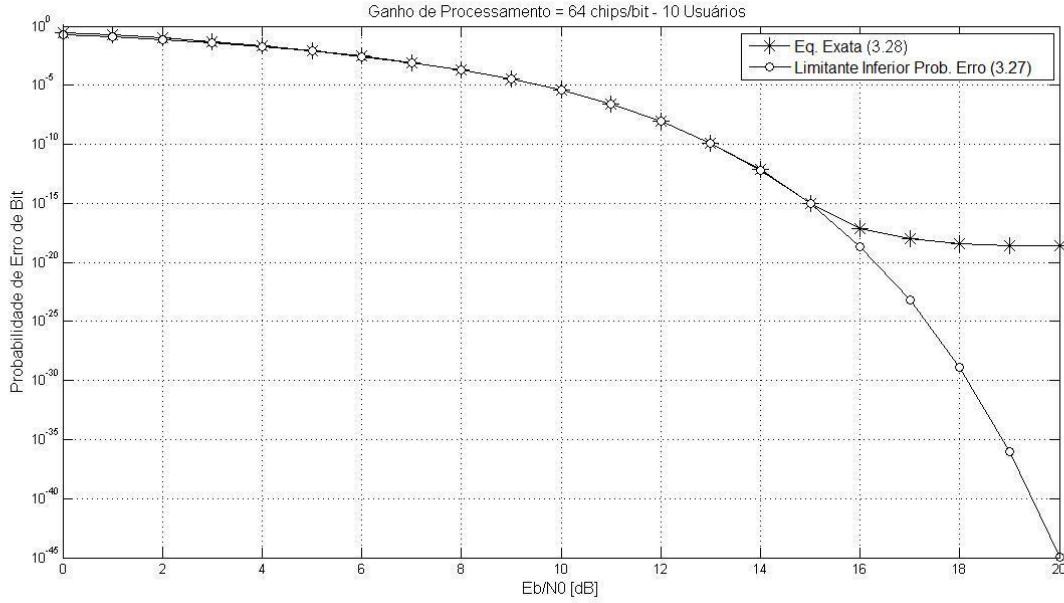


Fig. 3.5: Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit com 10 usuários ativos.

$$\overline{P}_b \cong \frac{(10 - 1)}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2^{64}} = 1,22 \cdot 10^{-19}$$

Como neste caso são considerados 10 usuários, o fator multiplicativo do segundo termo é diferente de 1/2, conforme visto na análise realizada. Entretanto, o valor obtido pode ser considerado uma boa aproximação e com isso, valida o patamar de probabilidade de erro de bit média encontrado.

Por fim, é apresentado na fig. 3.6 um sistema com 30 usuários ativos com um ganho de processamento igual a 128 chips/bit. Neste caso, observa-se que a curva referente ao limitante inferior possui o mesmo comportamento referente à curva da expressão limitante exata até uma relação sinal-ruído de 18 dB, quando a curva de (3.28) se estabiliza a uma probabilidade de erro de bit extremamente pequena, que é próxima a:

$$\overline{P}_b \cong \frac{(30 - 1)}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2^{128}} = 2,13 \cdot 10^{-38}$$

Com isso, pode-se concluir que o limitante inferior obtido em (3.27) é uma boa aproximação para o detector multiusuário ótimo quando se utiliza elevados valores de ganho de processamento.

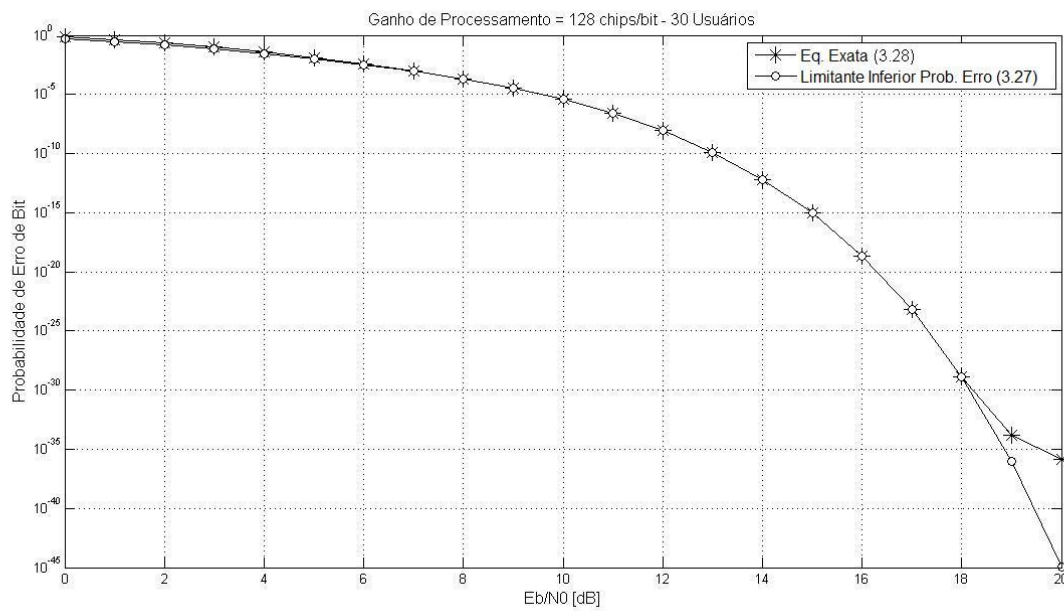


Fig. 3.6: Probabilidade de erro de bit média em função da relação sinal-ruído para um ganho de processamento igual a 128 chips/bit com 30 usuários ativos.

Capítulo 4

Detector Multiusuário por Confiabilidade

Visto a complexidade proibitiva do detector multiusuário ótimo para um alto número de usuários, propõe-se um novo algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo, que mescla a técnica de detecção ótima com limiares de confiabilidade, que tendem a reduzir a complexidade em número de cálculos deste novo detector, a fim de torná-lo viável quando o número de usuários ativos no sistema é alto.

Neste capítulo será abordado o funcionamento do algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo, com todas suas particularidades. Será apresentado um desenvolvimento matemático referente à complexidade teórica deste algoritmo, bem como comparações com simulações realizadas empregando esta técnica de detecção. Será apresentado também o desenvolvimento matemático referente à probabilidade de erro de bit teórica, assim como simulações com o intuito de avaliar o desempenho do algoritmo proposto tanto em banda base, quanto em banda passante.

4.1 Algoritmo de Detecção Sub-ótimo

O algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo proposto, chamado de algoritmo de detecção multiusuário por confiabilidade, assim como qualquer algoritmo sub-ótimo tem como finalidade obter desempenhos próximos ao caso ótimo, porém com alguma vantagem frente a este caso. Neste algoritmo, o objetivo principal é a minimização da complexidade em número de cálculos. Ao contrário do algoritmo ótimo que, conforme visto, calcula 2^K possíveis combinações dos bits enviados por K usuários em um alfabeto binário, o algoritmo sub-ótimo proposto atribui uma medida de confiabilidade às amostras de bit, na tentativa de se diminuir o número de cálculos necessários para melhor decidir os bits recebidos. Caso haja diminuição no número de cálculos, a complexidade da detecção multiusuário proposta também será reduzida.

Este algoritmo trabalha com limiares de confiabilidade que classificam as amostras recebidas pelo detector como confiáveis ou não-confiáveis. Tal classificação depende do valor da amostra em relação

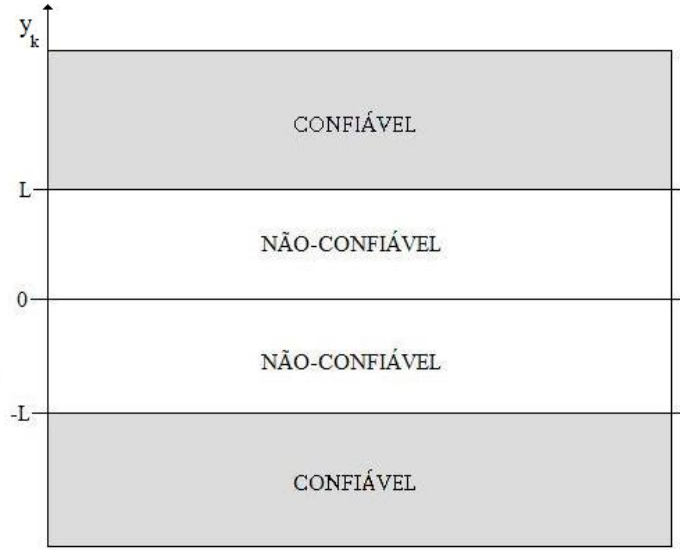


Fig. 4.1: Regiões de confiabilidade e não-confiabilidade das amostras, onde $\pm L$ são os limiares de confiabilidade.

a limiares de confiabilidade, que como o próprio nome infere, concede a garantia de veracidade da amostra. A fig. 4.1 ilustra as regiões de confiabilidade de acordo com os limiares L e $-L$. Caso uma amostra esteja entre os limiares de confiabilidade, ela é classificada como não-confiável, caso contrário é classificada como confiável.

As amostras confiáveis serão decididas antes da realização dos cálculos da métrica e de uma forma simples, onde os bits serão determinados de acordo com a polaridade de suas amostras, ou seja, usando decisão abrupta (*hard decision*). Considerando um determinado usuário, para amostras confiáveis positivas, o bit decidido será $+1$ e para amostras confiáveis negativas o bit decidido será -1 .

Já para o caso de K_{NC} amostras não-confiáveis, com $K_{NC} \leq K$, então $2^{K_{NC}}$ possíveis combinações serão buscadas, podendo-se reduzir assim o número de cálculos. Neste caso, os bits oriundos de amostras confiáveis, entram já decididos nos cálculos do vetor de bits a ser analisado, não gerando assim complexidade adicional à detecção.

O limiar L pode ser variado desde 0 até ∞ , obtendo-se o desempenho correspondente ao filtro casado para $L = 0$ e ao detector multiusuário ótimo para $L = \infty$. Os limiares devem ser simétricos em relação ao zero devido ao fato do ruído e da interferência de múltiplo acesso introduzidos no sistema terem média nula.

O limiar de confiabilidade altera a complexidade em número de cálculos do detector, mas por sua vez está relacionado à probabilidade de erro de bit. Para um valor de limiar baixo, a complexidade de detecção é também baixa, porém o desempenho do sistema será inferior. Por outro lado, um alto

Usuário	1	2	3	4	5
Bits Enviados	-1	-1	1	1	1
Amostras Recebidas	-1,21	-0,49	-0,23	0,99	0,51
Confiabilidade	C	NC	NC	C	C
Decisão	-1	-0,49	-0,23	1	1

Tab. 4.1: Caso ilustrativo dos bits transmitidos por 5 usuários e da respectiva detecção para as amostras rotuladas como confiáveis, sendo o limiar de confiabilidade igual a 0,5, onde C indica as amostras confiáveis e NC representa as amostras não-confiáveis.

Usuário	1	2	3	4	5
Seq. 1	-1	1	1	1	1
Seq. 2	-1	1	-1	1	1
Seq. 3	-1	-1	1	1	1
Seq. 4	-1	-1	-1	1	1

Tab. 4.2: Possíveis sequências de bits que terão as métricas calculadas pelo detector sub-ótimo usando (3.3)

limiar de confiabilidade gera um excelente desempenho da detecção, mas que por sua vez gera uma complexidade muito alta. Portanto a escolha do limiar de decisão deve ser balanceada de forma a encontrar um equilíbrio entre complexidade em números de cálculos e desempenho em termos da probabilidade de erro de bit.

A tab. 4.1 exemplifica um simples caso da transmissão de bits referentes à 5 usuários com um limiar de confiabilidade ajustado em $\pm 0,5$. Pode-se observar que dado esses limiares de confiabilidade, três das cinco amostras são confiáveis e podem ser decididas com antecedência (usuários 1, 4 e 5), restando assim dúvida apenas na decisão de outras duas amostras. Para efeito de comparação, de acordo com o exemplo proposto para o caso de detecção ótima haveriam $2^5 = 32$ possíveis combinações a serem calculadas, ao passo que utilizando o algoritmo de detecção sub-ótimo há apenas $2^2 = 4$ possíveis sequências a serem analisadas, que estão listadas na tab. 4.2.

A complexidade deste algoritmo é dada por $2^{K_{NC}}$, onde K_{NC} é o número de amostras não-confiáveis. Além disso, a complexidade tem um limitante superior que é exatamente a complexidade relativa ao detector multiusuário ótimo, que ocorre quando o número de amostras não-confiáveis se iguala ao número de usuários, chegando a 2^K , à medida que $L \rightarrow \infty$. Por outro lado, há também um limitante inferior de complexidade igual a $2^0 = 1$, quando todas as amostras são classificadas como confiáveis, caso este que ocorre na detecção através do filtro casado. A complexidade em número de cálculos do algoritmo de detecção sub-ótimo proposto é obtida na próxima seção.

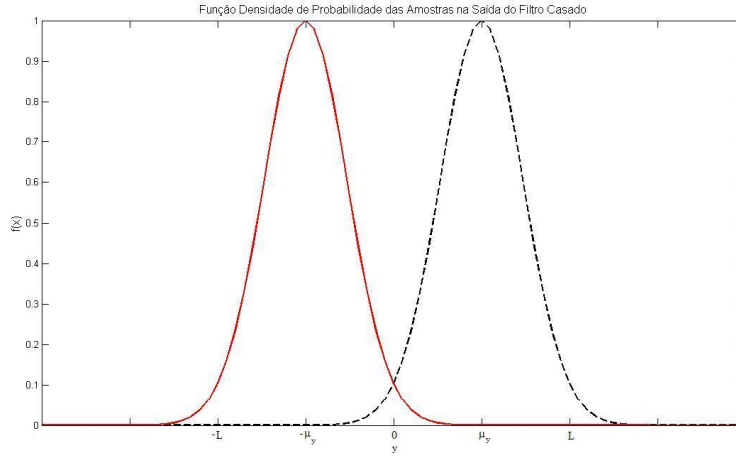


Fig. 4.2: Função densidade de probabilidade das amostras na saída do filtro casado, para limiares de confiabilidade L e $-L$.

4.2 Complexidade do Algoritmo de Detecção Sub-ótimo

Conforme visto na seção anterior, o algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo proposto tem como objetivo diminuir a complexidade em número de cálculos, se comparado com o detector multiusuário ótimo. Tal diminuição do número de cálculos se deve à decisão abrupta realizada nas amostras classificadas como confiáveis. As seguintes análises serão realizadas para o caso em banda base, mas equivalem da mesma forma para o caso em banda passante, apenas levando-se em consideração a média e variância obtidas em (2.37) e (2.42).

Esta complexidade será modelada matematicamente, para comprovação da eficiência do algoritmo proposto e também para comparações com simulações implementadas em Matlab. Na saída do filtro casado da fig. 3.1 foi suposto que a variável de decisão é gaussiana, conforme mostra a fig. 4.2, que apresenta a função densidade de probabilidade (PDF - *Probability Density Function*) das amostras, além dos limiares de confiabilidade $\pm L$. As distribuições gaussianas apresentadas na fig. 4.2 possuem médias $+\mu_y$ referente ao bit transmitido $+1$ e $-\mu_y$ referente ao bit transmitido -1 , além da variância ser definida segundo (2.28) para o caso em banda base e (2.42) para o caso em banda passante. Os valores das constantes utilizadas nas PDFs mostradas na fig. 4.2, segundo (2.28), são: $E_b/N_0 = 8$ dB, $G = 64$ chips/bit, $K = 10$ usuários e A igual a 1, sendo os bits transmitidos $b_k = \pm 1$.

Com base na fig. 4.2 pode-se definir as expressões de probabilidade de ocorrência das amostras confiáveis, ou seja, as amostras cujos valores em módulo encontram-se acima do limiar de confiabilidade L . Sendo assim, define-se duas equações, uma referente ao bit transmitido $+1$ e a outra referente ao bit transmitido -1 , da seguinte forma:

$$P_{C|b_k=+1}(L) = \int_L^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (4.1)$$

$$P_{C|b_k=-1}(L) = \int_{-\infty}^{-L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y+\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (4.2)$$

A equação (4.1) define a área sob a curva gaussiana com média $+\mu_y$ desde o limiar de decisão positivo até $+\infty$ e analogamente (4.2) define a área sob a curva gaussiana de média $-\mu_y$ desde $-\infty$ até o limiar de decisão $-L$. Conforme citado anteriormente, estas equações definem a probabilidade de ocorrência das amostras confiáveis, dado os limiares de decisão $\pm L$. Como o objetivo de estudo está na complexidade em número de cálculos do detector, é necessário encontrar-se a probabilidade de ocorrência das amostras não-confiáveis.

Uma amostra é confiável ou não. Assim,

$$P_{NC} = 1 - P_C \quad (4.3)$$

Portanto, a probabilidade de ocorrência de amostras não-confiáveis, $P_{NC|b_k=\pm 1}(L)$, pode ser definida da seguinte forma:

$$P_{NC|b_k=+1}(L) = 1 - \int_L^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (4.4)$$

$$P_{NC|b_k=-1}(L) = 1 - \int_{-\infty}^{-L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y+\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (4.5)$$

Para se encontrar a probabilidade total da complexidade em relação aos limiares de confiabilidade, aplica-se o teorema da probabilidade condicional [2], dado por:

$$P_{NC}(L) = P(b_k = +1) \cdot P_{NC|b_k=+1}(L) + P(b_k = -1) \cdot P_{NC|b_k=-1}(L) \quad (4.6)$$

Dado que os bits transmitidos são equiprováveis,

$$P(b_k = +1) = P(b_k = -1) = \frac{1}{2} \quad (4.7)$$

então,

$$P_{NC}(L) = \frac{1}{2}P_{NC|b_k=+1}(L) + \frac{1}{2}P_{NC|b_k=-1}(L) \quad (4.8)$$

Pela simetria do problema, pode-se considerar que a área calculada por meio de (4.4) e (4.5) resultam em valores idênticos, o que possibilita a seguinte simplificação na resolução do problema:

$$P_{NC}(L) = P_{NC|b_k=+1}(L) \quad (4.9)$$

Sendo assim, escrevendo (4.9) em termos da função $Q(x)$, tem-se,

$$P_{NC}(L) = 1 - Q\left(\frac{L - \mu_y}{\sigma_y}\right) \quad (4.10)$$

Como cada amostra é confiável ou não com probabilidade P_{NC} , uma função densidade de probabilidade binomial pode ser associada ao conjunto de K amostras. Tem-se então que o número médio de amostras não-confiáveis é dado por:

$$K_{NC}(L) = K P_{NC}(L) \quad (4.11)$$

Com isso, a complexidade teórica em termos do número médio cálculos realizados pelo detector, \mathcal{C} , é dada por:

$$\mathcal{C} = 2^{K P_{NC}(L)} \quad (4.12)$$

Deve-se salientar que (4.12) não é a complexidade média, que na verdade é dada por $\overline{2^{K_{NC}}}$. Porém, análises adicionais mostraram que a diferença entre (4.12) e a complexidade média é menor do que 20%. Sendo assim, devido à simplicidade matemática oferecida por (4.12), esta será adotada como a complexidade ao longo desta dissertação.

Analizando-se (4.12) para um caso com 10 usuários ativos, quando o limiar de confiabilidade é ajustado em $L = 1$ usando (4.6), tem-se $P_{NC}(L) = 0,5$, portanto a complexidade em número de cálculos do detector, usando (4.12) é igual a $2^{K/2} = 32$. Quando o limiar de confiabilidade tende a infinito, $P_{NC}(L) \rightarrow 1$, a complexidade do detector tende a complexidade máxima, 2^K , complexidade essa referente ao detector ótimo. Por outro lado, quando $L = 0$, $P_{NC}(L) \cong 0$ e a complexidade é unitária, representado assim a complexidade referente ao filtro casado.

Os gráficos referentes à complexidade teórica obtidos através de (4.12) serão apresentados posteriormente, quando forem também apresentadas as simulações realizadas para a análise de tal caso.

4.3 Probabilidade de Erro de Bit do Algoritmo Sub-ótimo

Outra importante análise a ser realizada se refere ao desempenho que o sistema apresenta pela escolha de um determinado limiar de confiabilidade. Esta análise será realizada de forma a verificar o comportamento da probabilidade de erro de bit de acordo com a variação dos limiares de confiabilidade. Os erros ocasionados por uma decisão abrupta precipitada são mais prováveis de ocorrerem

com os limiares de confiabilidade baixos ao invés de limiares de confiabilidade altos. Porém, há de lembrar que limiares de confiabilidade altos geram uma complexidade também alta na detecção. Por isso, esta escolha deve ser balanceada em termos de complexidade e desempenho.

Para tal análise será utilizada novamente a fig. 4.2. Graficamente estes erros ocorrem quando amostras referente ao bit transmitido $b_k = -1$, que corresponde à PDF com média $-\mu_y$, ultrapassam o limiar de confiabilidade $+L$ ou quando amostras referente ao bit transmitido $b_k = +1$, que está associado à PDF com média $+\mu_y$, ultrapassam o limiar de confiabilidade $-L$.

Com isso, pode-se definir o acréscimo de probabilidade de erro de bit em relação ao desempenho de um detector ótimo, da seguinte forma:

$$\Delta P_b(L) = \frac{1}{2} \int_L^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y+\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (4.13)$$

Sabendo que a função densidade de probabilidade das amostras são simétricas, pode-se afirmar que os dois termos de acréscimo de probabilidade de erro de bit encontrados são iguais entre si, o que gera a seguinte simplificação:

$$\Delta P_b(L) = \int_L^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y+\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (4.14)$$

Escrevendo (4.14) em termos da função $Q(x)$, chega-se à:

$$\Delta P_b(L) = Q\left(\frac{L + \mu_y}{\sigma_y}\right) \quad (4.15)$$

Como o resultado obtido em (4.15) foi a probabilidade de erro de bit adicional em função de um par de limiares de confiabilidade utilizado na detecção, para se analisar a probabilidade de erro de bit, deve-se adicionar o termo de erro à probabilidade de erro de bit do detector multiusuário ótimo, neste caso utilizando a expressão do limitante inferior obtida em (3.27):

$$P_b \cong Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \left(\frac{K-1}{2}\right)Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}\left(1 - \frac{0,783}{\sqrt{G}}\right)}\right) + Q\left(\frac{L + \mu_y}{\sigma_y}\right) \quad (4.16)$$

Com isso, através de (4.16) pode-se obter o desempenho em termos de probabilidade de erro de bit em função de L . Considerando que o limiar de confiabilidade tenda a infinito, $L \rightarrow \infty$, a probabilidade de erro de bit do algoritmo proposto tende à probabilidade de erro de bit do detector ótimo.

Na próxima seção, serão mostrados gráficos da equação obtida em (4.16) e também da simulação da probabilidade de erro de bit, com o intuito de se verificar, além do desempenho referente ao limiar de confiabilidade, se a modelagem matemática realizada está de acordo com as simulações.

4.4 Resultados Obtidos

Os gráficos referentes às equações teóricas obtidas e às simulações realizadas serão apresentadas conjuntamente para a melhor análise da eficiência do algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo.

As simulações do algoritmo proposto foram realizadas utilizando o método de Monte Carlo com o *software* Matlab, tanto para o caso em banda base, como para o caso em banda passante. Nestas simulações foi considerado um sistema de comunicação CDMA com espalhamento espectral utilizando a técnica DS com sequências de espalhamento do tipo aleatórias para um caso com 10 usuários ativos no sistema. A modulação utilizada foi a BPSK, sendo enviados bits antipodais ± 1 , e o ruído introduzido na recepção é do tipo AWGN. Na detecção foi considerado também um sincronismo perfeito e um controle de potência ideal no receptor.

Para a implementação da simulação do algoritmo proposto, foram utilizados os seguintes procedimentos: após definir os parâmetros de simulação (número de usuários, relação sinal-ruído, número de chips do espalhamento espectral), a rotina do algoritmo se inicia gerando as sequências de espalhamento e os bits de todos usuários de forma aleatória. Após esta etapa, cada usuário tem seu bit espalhado espectralmente e posteriormente as sequências de cada usuário são somadas de forma a simular o canal aditivo. A essa sequência é somada um ruído aditivo gaussiano branco e a partir deste ponto tem-se o início da recepção. A sequência recebida corrompida por ruído passa por um filtro casado, quando é então comprimido espectralmente através da multiplicação pelas mesmas sequências de espalhamento utilizadas na transmissão, gerando assim as amostras de cada usuário.

Com isso, o próximo passo é classificar estas amostras como confiáveis ou não-confiáveis. As amostras classificadas como confiáveis tem seus bits já definidos por decisão abrupta, ao passo que para as amostras classificadas como não-confiáveis, uma busca dentre todas as $2^{K_{NC}}$ possíveis sequências é realizada por meio de (3.3), a fim de se obter os bits de informação dos K usuários com maior métrica. Por fim, os bits decididos são comparados com os bits transmitidos, a fim de se contar os erros produzidos. O número de erros é armazenado e esta rotina é então repetida até se obter o número total de erros definido inicialmente, para se poder, então, calcular a probabilidade de erro de bit média obtida na simulação, segundo o método de Monte Carlo. O número de erros é escolhido para se garantir um pequeno intervalo de incerteza.

Com o funcionamento do algoritmo já esclarecido, pode-se iniciar agora a análise das simulações realizadas. Durante tal análise, as curvas em que (4.12) foi utilizada serão referenciadas como equação teórica de complexidade e as curvas em que (4.16) foi utilizada serão referenciadas como equação teórica da probabilidade de erro de bit. Nas figuras correspondentes à complexidade, foi introduzida uma curva nomeada complexidade máxima, referente à complexidade do detector ótimo, 2^K , que serve como um patamar de referência do valor máximo de complexidade. Já nas figuras de probabilidade de erro de bit do detector proposto, a curva de desempenho do detector ótimo foi

inserida, servindo também como um patamar de referência a ser atingido pelas curvas originadas por meio de (4.16) e de simulação.

4.4.1 Resultados em Banda Base

Na fig. 4.3 os gráficos referentes à complexidade e à probabilidade de erro de bit para um sistema com ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído igual a 5 dB são apresentados. Observa-se que as curvas referentes às equações teóricas obtidas por meio da modelagem matemática apresentam concordância com as curvas obtidas por meio de simulação em ambos os gráficos. Para o gráfico de complexidade *versus* limiar de confiabilidade observa-se o previsto nas análises da equação teórica de complexidade, ou seja, para o limiar igual a 1 a complexidade é igual a 32, e quando o limiar tende a infinito, a complexidade tende à complexidade máxima, referente à complexidade do detector ótimo. Para o gráfico da probabilidade de erro de bit *versus* limiar de confiabilidade, o previsto na análise de (4.16) também ocorre, ou seja, com o aumento do limiar de confiabilidade, a probabilidade de erro de bit do algoritmo proposto tende à probabilidade de erro de bit do detector multiusuário ótimo.

Analisando-se agora os gráficos da fig. 4.3 em conjunto, pode-se observar que para se obter uma probabilidade de erro de bit próxima ao desempenho do detector ótimo, o que é altamente desejável, pode-se utilizar um limiar de confiabilidade igual a 1,2. Caso se utilize este limiar de confiabilidade, a complexidade do detector multiusuário sub-ótimo é em torno de 80, complexidade esta que é muito menor que a apresentada pelo detector ótimo, que é de 1024, para este caso com 10 usuários ativos no sistema.

Na fig. 4.4 os gráficos de complexidade e de probabilidade de erro de bit para um sistema com ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB são apresentados. Observa-se que as curvas da simulação acompanham as curvas teóricas. Estes gráficos mostram que com um limiar de confiabilidade em torno de 0,6 é possível se obter um desempenho equiparável ao caso do detector ótimo com uma complexidade em número de cálculos de 5.

Dando continuidade a análise do desempenho do detector sub-ótimo com uma relação sinal-ruído igual a 5 dB, a fig. 4.5 apresenta os gráficos referentes a um ganho de processamento igual a 128 chips/bit. Por meio desta figura, observa-se que a probabilidade de erro de bit desejada é obtida com um limiar de confiabilidade próximo a 0,4, que gera uma complexidade em número de cálculos para o detector em torno de 2. Dos casos até aqui analisados, pode-se observar que o valor do limiar de confiabilidade, necessário para se obter o desempenho desejado, diminuiu com o aumento do ganho de processamento. Este era um resultado esperado, visto que com um maior ganho de processamento, a variância da função densidade de probabilidade das amostras recebidas fica menor, de acordo com (2.28), o que significa que as amostras recebidas sofrem menos influência do ruído e da interferência

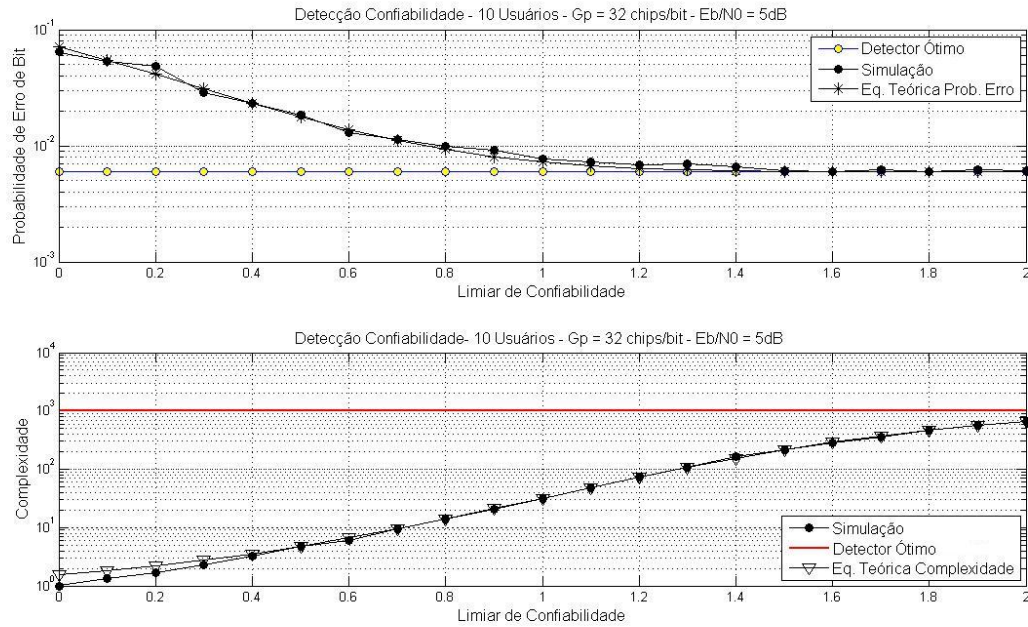


Fig. 4.3: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB.

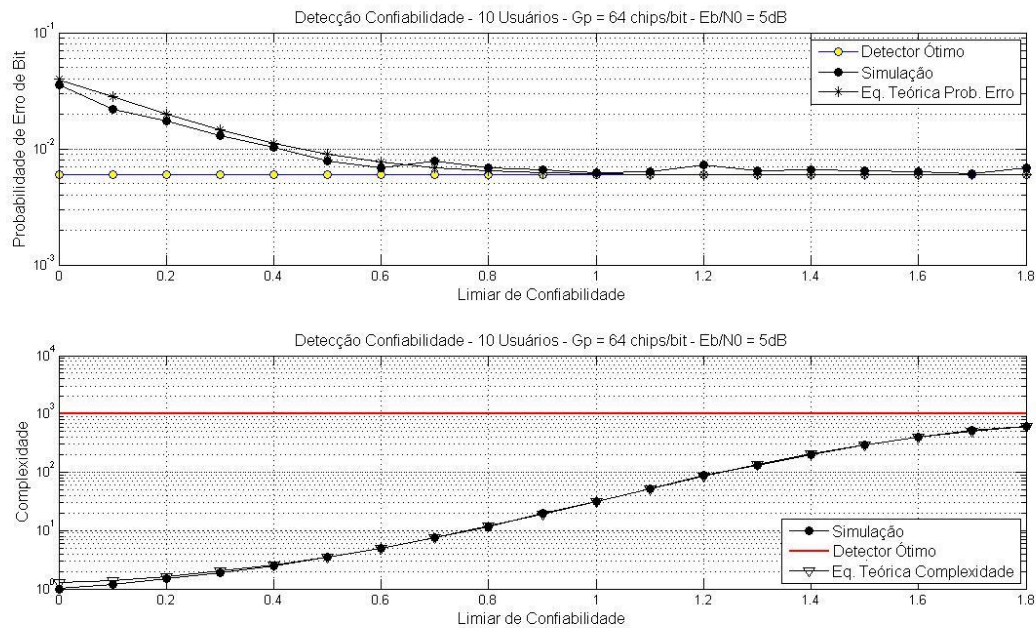


Fig. 4.4: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB.

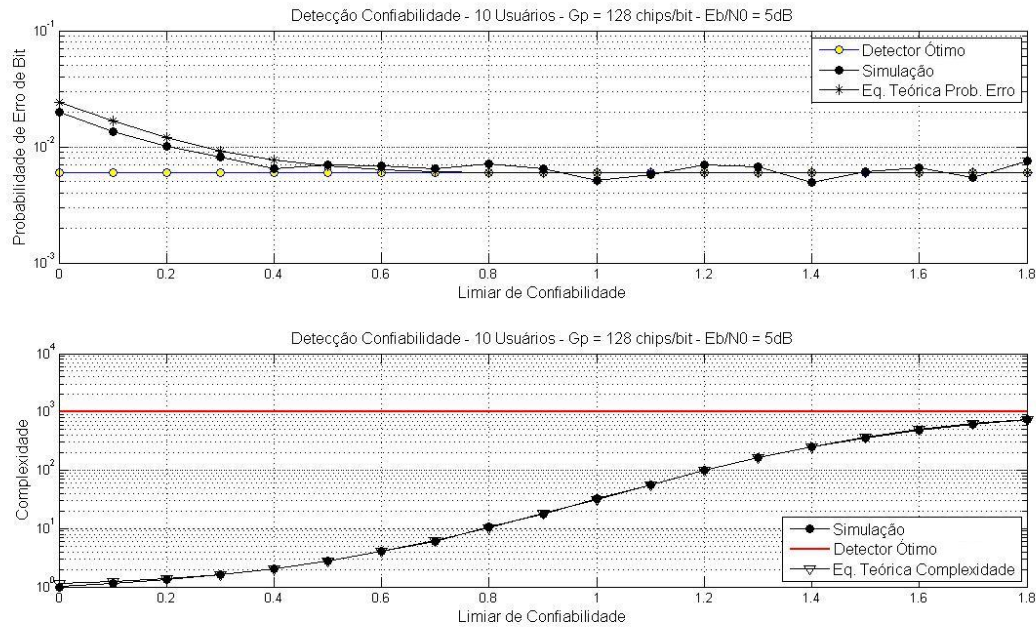


Fig. 4.5: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB.

que corrompem o canal.

Analisando-se agora o desempenho do detector sub-ótimo para uma relação sinal-ruído igual a 8 dB, o caso com um ganho de processamento igual a 32 chips/bit é inicialmente abordado. Por meio da fig. 4.6 pode-se observar que também é possível se obter um desempenho em termos de probabilidade de erro de bit próximo ao caso ótimo com uma complexidade menor que a oferecida por esta detecção ótima. Para este caso, observa-se que para se chegar à probabilidade de erro de bit desejada, pode-se estabelecer o limiar de confiabilidade em 1,5, limiar este que está relacionado com uma complexidade em número de cálculos próximo a 300.

Comparando-se os resultados obtidos com o ganho de processamento de 32 chips/bit, observa-se que apesar de apresentar maior ruído em relação ao caso com 8 dB, o caso com relação sinal-ruído de 5 dB alcança o desempenho referente ao detector ótimo com um limiar de confiabilidade menor. Este resultado se deve ao fato de que a probabilidade de erro de bit do detector ótimo com 5 dB é da ordem de $6 \cdot 10^{-3}$ e com 8 dB é da ordem de $2 \cdot 10^{-4}$, sendo o desempenho referente à relação sinal-ruído de 5 dB mais fácil de se alcançar em relação ao desempenho referente à relação sinal-ruído de 8 dB.

Aumentando-se agora o valor do ganho de processamento para 64 chips/bit e mantendo-se a relação sinal-ruído de 8 dB, pode-se observar na fig. 4.7 que com o limiar de confiabilidade igual a 0,9 é possível se obter o desempenho referente ao detector ótimo com uma complexidade em torno de 20.

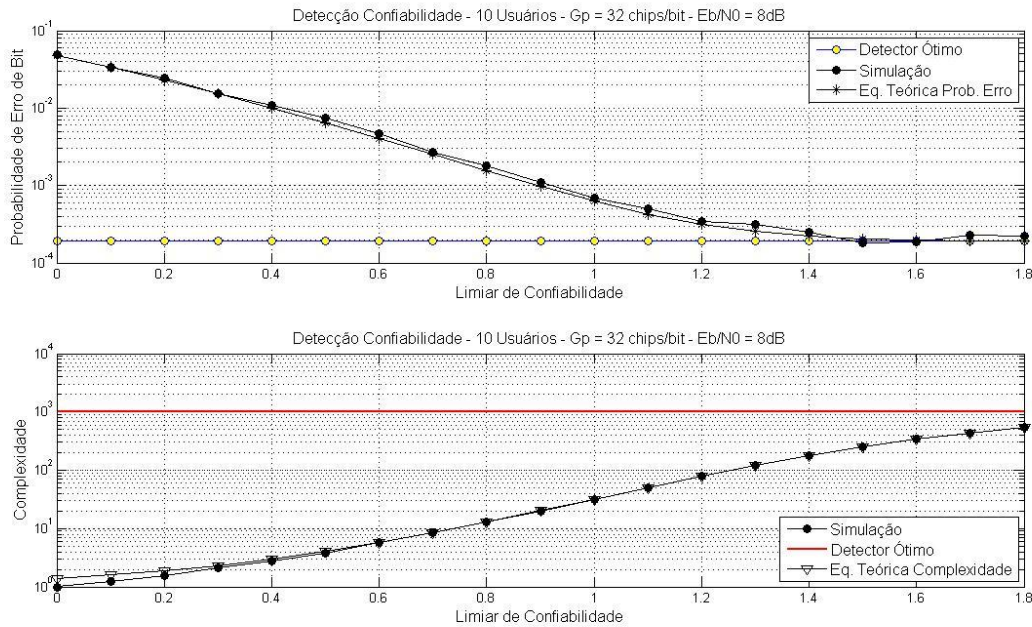


Fig. 4.6: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB.

Assim como nos casos do ganho de processamento igual a 32 chips/bit, o limiar de confiabilidade escolhido para uma relação sinal-ruído de 8 dB é maior que o referente ao caso com relação sinal-ruído igual a 5 dB.

Estabelecendo agora um ganho de processamento igual a 128 chips/bit e mantendo uma relação sinal-ruído de 8 dB, resultados estes ilustrados na fig. 4.8, pode-se observar que com limiar de confiabilidade extremamente baixo, em torno de 0,5, chega-se à probabilidade de erro de bit apresentada pelo detector ótimo. Com este limiar de confiabilidade é possível se obter tal desempenho com uma complexidade em número de cálculos igual a 2, resultado este bastante significativo, em comparação aos 1024 cálculos realizados com o detector multiusuário ótimo. Novamente o valor do limiar de confiabilidade necessário para se obter o desempenho referente ao detector ótimo foi menor para o caso com relação sinal-ruído igual a 5 dB.

São apresentados nas fig. 4.9 e 4.10 os gráficos comparativos de complexidade em função do limiar de confiabilidade para, respectivamente, diferentes relações sinal-ruído e ganhos de processamento utilizados.

A fig. 4.9 apresenta a complexidade em função do limiar de confiabilidade, tendo como parâmetro a relação sinal-ruído. Pode-se observar que ambas as curvas se encontram para um limiar de confiabilidade igual a 1. Analisando (4.10), observa-se que, para o limiar de confiabilidade igual a μ_y , o

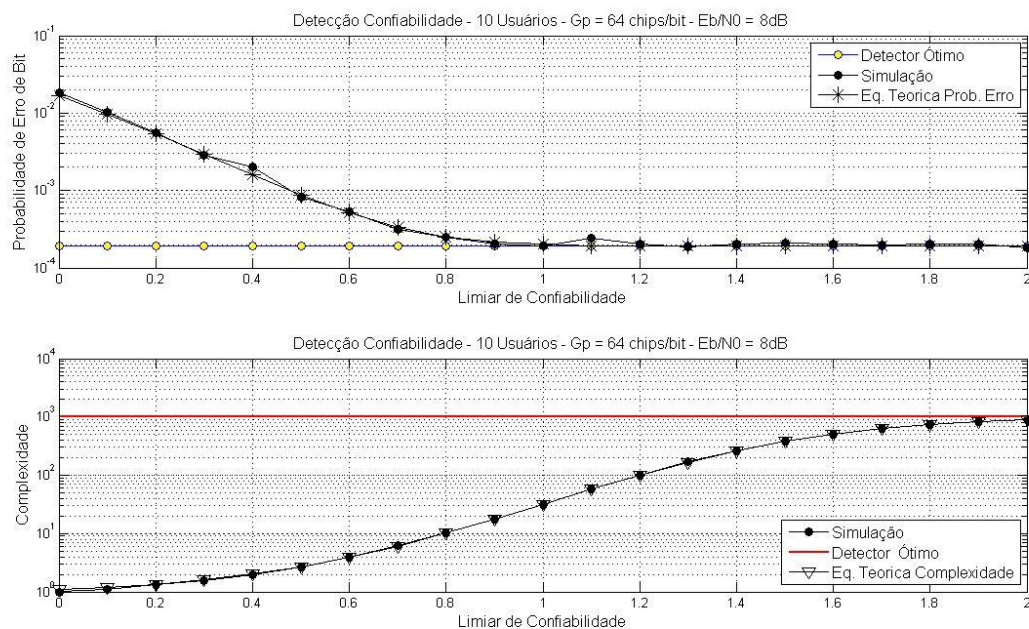


Fig. 4.7: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB.

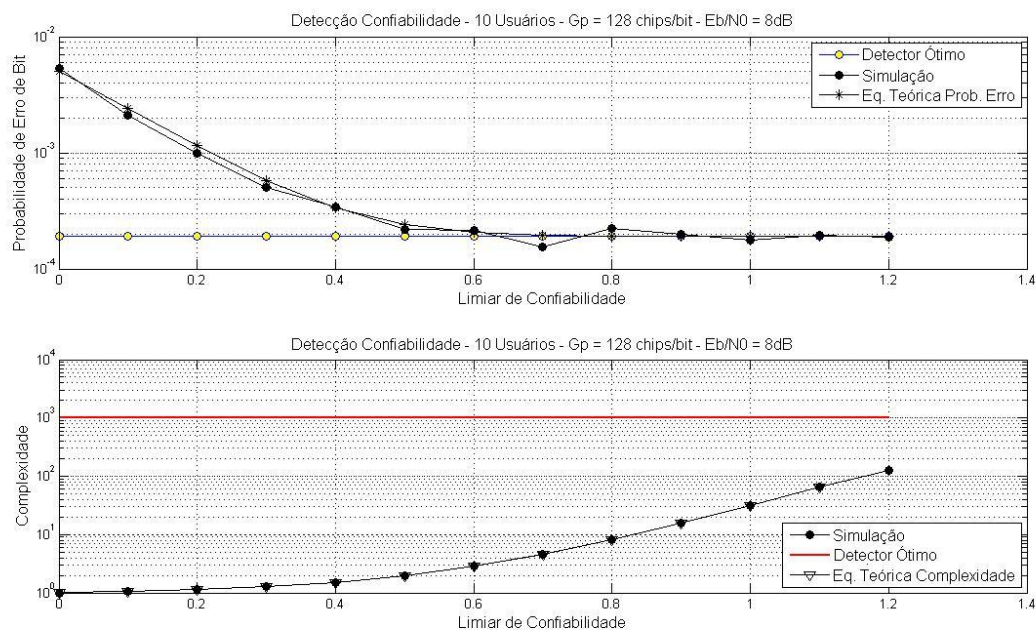


Fig. 4.8: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB.

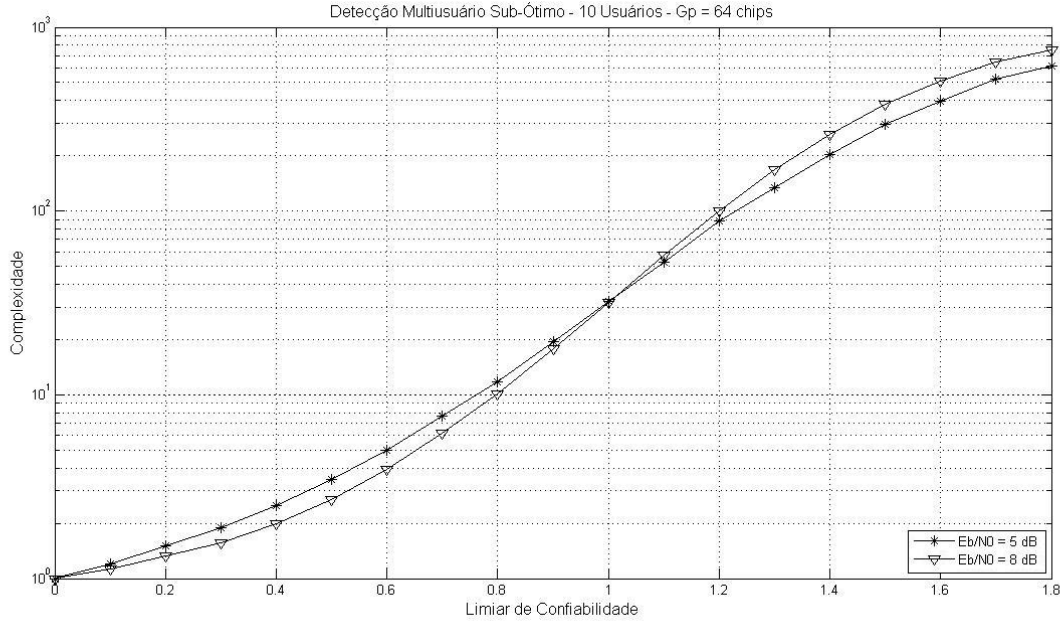


Fig. 4.9: Complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual a 64 chips/bit. Comparação para relações sinal-ruído iguais a 5 e 8 dB.

argumento da função $Q(x)$ é nulo, o que leva a probabilidade média de bits não confiáveis igual $1/2$. Com isso, independente de ganho de processamento ou relação sinal-ruído utilizados, a complexidade é igual a $2^{K/2}$, neste caso com $K = 10$, $C = \sqrt{1024} = 32$.

Pode-se observar também para limiares de confiabilidade inferiores que 1, a curva referente à relação sinal-ruído de 5 dB apresenta uma complexidade ligeiramente maior que a curva para relação sinal-ruído de 8 dB, fato este que se inverte para os valores de limiar de confiabilidade maiores que 1. Como a relação sinal-ruído igual a 5 dB apresenta mais ruído em comparação com a relação sinal-ruído igual a 8 dB, consequentemente a função densidade de probabilidade das amostras recebidas apresentará maior variância. Ao se estabelecer o limiar de confiabilidade para valores abaixo de 1, a área calculada por (4.4) ou (4.5) na PDF de relação sinal-ruído igual a 5 dB será maior em comparação com a curva de relação sinal-ruído igual a 8 dB, justificando assim um maior número de cálculos. Situação inversa ocorre para os limiares de confiabilidade estabelecidos acima de 1.

A fig. 4.10 apresenta a complexidade em função do limiar de confiabilidade, tendo como parâmetro ganhos de processamento iguais a 32, 64 e 128 chips/bit. A relação sinal-ruído utilizada neste gráfico foi de 8 dB. Assim como verificado na fig. 4.9, as curvas da fig. 4.10 também se encontram no limiar de confiabilidade igual a 1. Para limiares de confiabilidade inferiores a 1, um menor ganho de processamento gera uma complexidade um pouco maior em comparação com os ganhos de processamento

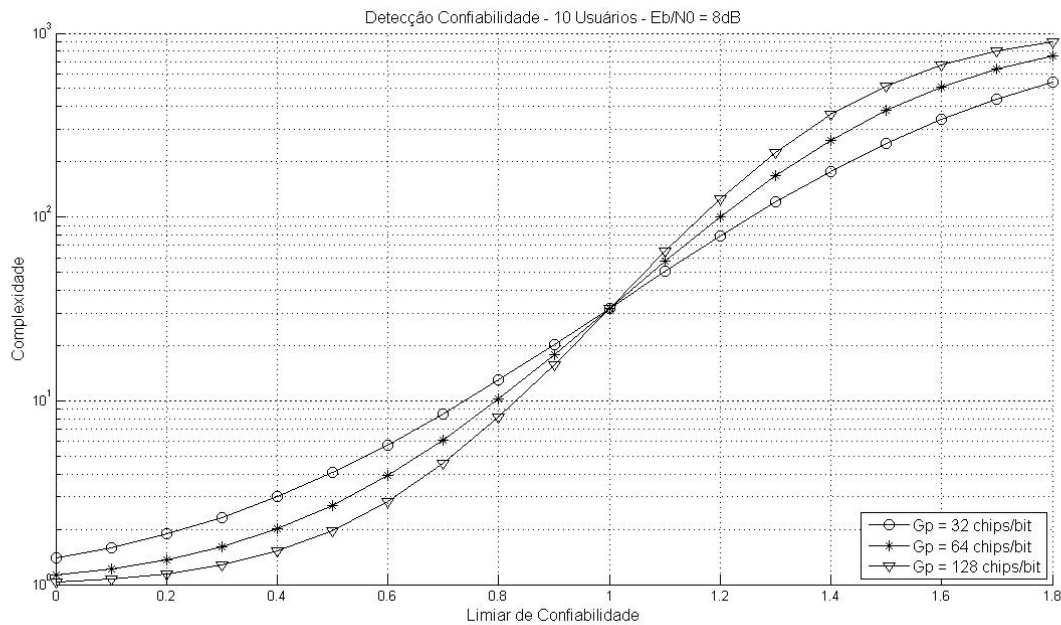


Fig. 4.10: Complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos e relação sinal-ruído igual a 8 dB. Comparação para ganhos de processamento igual a 32, 64 e 128 chips/bit.

maiores. Isto pode ser observado na fig. 4.10, onde a curva referente ao ganho de processamento igual a 32 chips/bit apresenta uma complexidade um pouco superior a curva referente ao ganho de processamento igual a 64 chips/bit, que por sua vez apresenta uma maior complexidade que a curva referente ao ganho de processamento igual a 128 chips/bit. Assim como na análise da fig. 4.9, a variância na função densidade de probabilidade das amostras recebidas está relacionada com a complexidade da detecção. O uso de um maior ganho de processamento gera uma variância menor nas amostras recebidas, conforme pode ser calculado em (2.28). Com isso, conforme já citado, ao se estabelecer o limitante de confiabilidade em valores abaixo de 1, a área calculada por (4.4) ou (4.5) será maior para um ganho de processamento menor, no caso, 32 chips/bit. Já para o caso onde os limitantes de confiabilidade são maiores que 1, o inverso ocorre.

Nas fig. 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 são apresentados os gráficos de probabilidade de erro de bit em função da relação sinal-ruído para diferentes limiares de confiabilidade. Estes gráficos servem de análise para o comportamento destes limiares de confiabilidade escolhidos perante a variação dos valores da relação sinal-ruído. Nestes gráficos são mostradas as curvas de desempenho do detector sub-ótimo proposto, por meio da equação teórica (4.16) e obtido por simulação, como também a curva de desempenho do detector ótimo, obtida em (3.27), como referência. Para construção de tais gráficos, foi considerado um sistema com 10 usuários e utilizado um ganho de processamento igual a

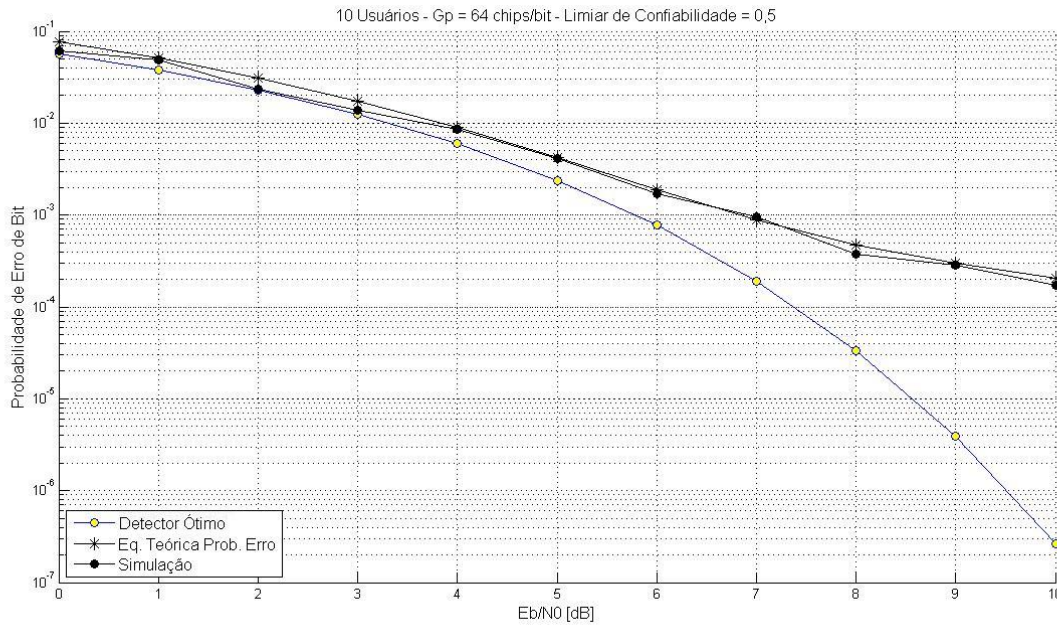


Fig. 4.11: Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 0,5. Comparação entre equação teórica do algoritmo sub-ótimo e simulação.

64 chips/bit.

Na fig. 4.11 ilustra-se a probabilidade de erro apresentada pelo detector sub-ótimo, ajustado em um limiar de confiabilidade igual a 0,5, frente a variação da relação sinal-ruído. Conforme pode-se observar, a curva teórica e a obtida por simulação são próximas da curva do detector ótimo até 5 dB. A partir deste valor, com a diminuição gradativa do ruído, a interferência de múltiplo acesso limita a probabilidade de erro de bit do algoritmo, resultando na discrepância entre as curvas dos algoritmos ótimo e sub-ótimo. Conforme pode ser observado também na fig. 4.11, a curva de simulação apresenta o mesmo comportamento da curva teórica obtida em (4.16), comprovando tal equação. O mesmo será observado para as demais curvas apresentadas nas próximas figuras.

A mesma análise é realizada na fig. 4.12, porém tendo o limiar de confiabilidade ajustado agora em 0,8. Neste caso observa-se que o desempenho do algoritmo proposto acompanha o desempenho do detector ótimo até uma relação sinal-ruído de 7 dB, e assim como no caso analisado anteriormente, a partir deste valor o desempenho tende a não acompanhar o decaimento da curva de desempenho do detector ótimo.

A fig. 4.13, mostra o desempenho do algoritmo de detecção sub-ótimo para um limiar de confiabilidade igual a 1,2. Pode-se observar que para este limiar, o desempenho apresenta uma eficiência compatível com o detector ótimo até uma relação sinal-ruído de 10 dB. Neste caso a curva de simu-

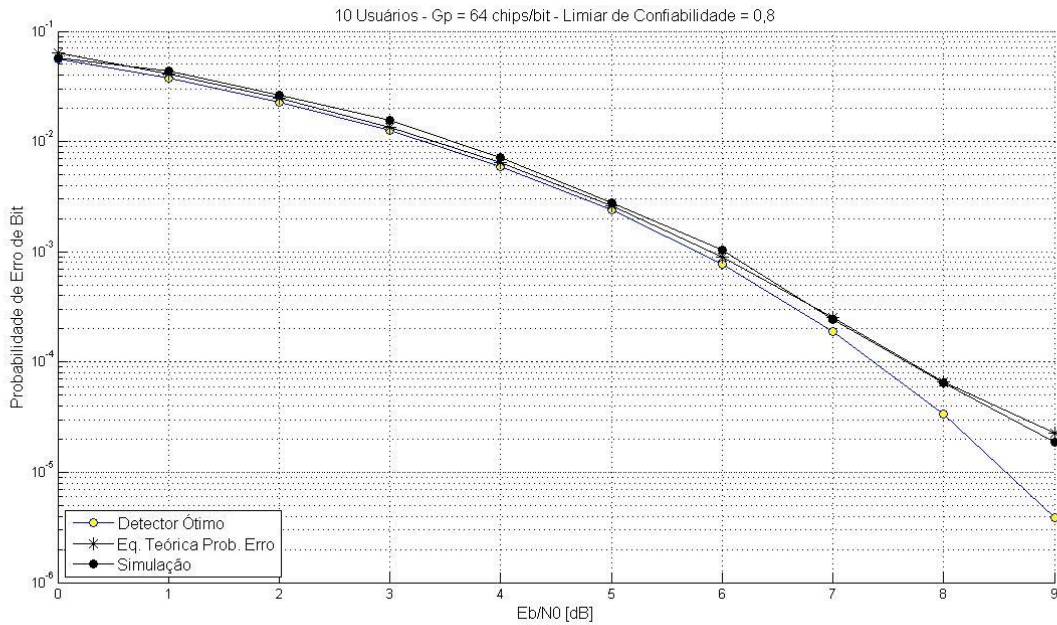


Fig. 4.12: Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 0,8. Comparação entre equação teórica do algoritmo sub-ótimo e simulação.

lação foi realizada até uma relação sinal-ruído de 7 dB, pois a complexidade computacional apresentada na obtenção da probabilidade de erro de bit para valores superiores a este torna-se muito elevada. Visto que (4.16) retrata fielmente o comportamento da simulação, para se analisar o desempenho para valores acima de 7 dB, utilizou-se apenas a curva teórica, conforme pode ser observado na fig. 4.13.

O comportamento esperado pelo detector multiusuário sub-ótimo para limiares de confiabilidade maiores do que os analisados, é que acompanhem cada vez mais a curva de desempenho referente ao detector multiusuário ótimo, atingindo seu desempenho quando o limiar de confiabilidade tender ao infinito.

Já na fig. 4.14 é apresentado o desempenho do detector multiusuário sub-ótimo em função da relação sinal-ruído com o limiar de confiabilidade ajustado em 0,0, ou seja, o detector garante que todas as amostras recebidas são confiáveis e com isso podem ficar livre de qualquer processamento adicional por parte do detector. Conforme citado anteriormente, ao ajustar o limiar de confiabilidade neste valor, o desempenho esperado pelo sistema seria idêntico ao desempenho da detecção através do filtro casado. Esta afirmação se mostra correta conforme pode ser observado na fig. 4.14, onde também verifica-se o baixo desempenho que o filtro casado (2.53) apresenta para este sistema, se comparado com detector ótimo.

Os gráficos seguintes apresentam a probabilidade de erro de bit e a complexidade em número de

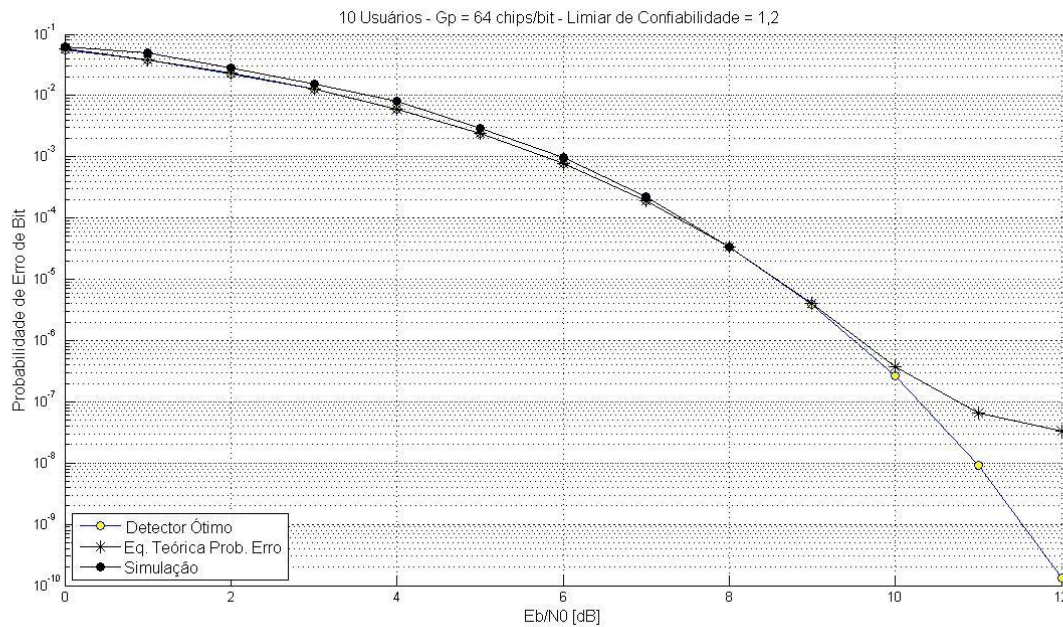


Fig. 4.13: Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 1,2. Comparação entre equação teórica do algoritmo sub-ótimo e simulação.

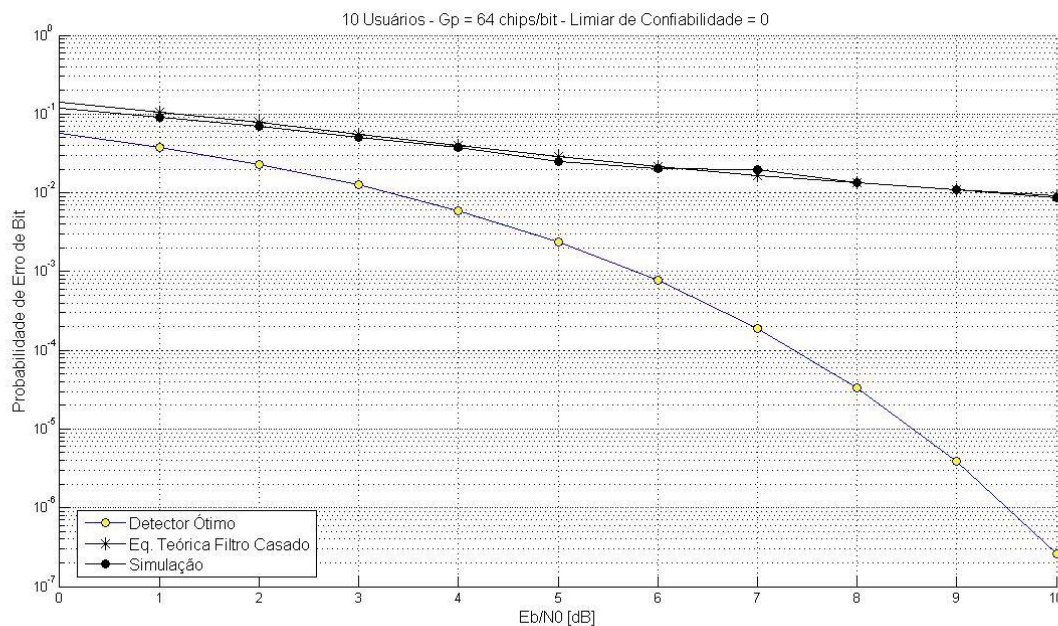


Fig. 4.14: Probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários ativos e ganho de processamento igual 64 chips/bit. Limiar de confiabilidade ajustado em 0. Comparação do desempenho do detector sub-ótimo com o desempenho do filtro casado.

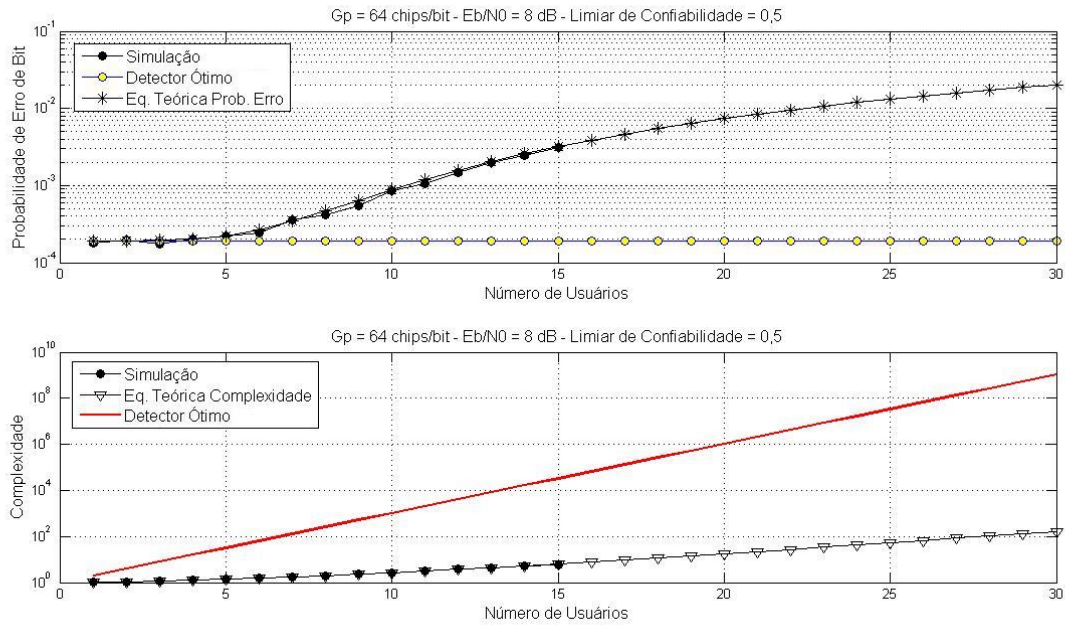


Fig. 4.15: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 0,5.

cálculos em função do número de usuários, tendo como parâmetros os limiares de confiabilidade, ajustados em 0,5, 0,8 e 1,0, respectivamente. O ganho de processamento de 64 chips/bit e a relação sinal-ruído de 8 dB foram utilizados em todos os gráficos, sendo que cada gráfico contém curvas referentes às equações teóricas obtidas para probabilidade de erro de bit e complexidade, além de curvas de simulação. Assim como nos gráficos apresentados anteriormente, a simulação apresentou o mesmo comportamento que as curvas obtidas por meio de equações teóricas. Por este motivo, as curvas de simulação foram realizadas apenas para um baixo número de usuários, visto que para um elevado número de usuários a complexidade computacional se torna elevada.

A fig. 4.15 apresenta os gráficos de probabilidade de erro de bit e complexidade em função do número de usuários, para o detector multiusuário por confiabilidade com um limiar ajustado em 0,5. Percebe-se que neste caso a probabilidade de erro de bit é mantida a mesma que a do detector ótimo, até uma configuração de 5 usuários, quando a probabilidade de erro de bit começa a aumentar e degradar o sistema de acordo com o aumento do número de usuários. Já a complexidade cresce com o aumento do número de usuários, porém este crescimento é bem inferior ao crescimento exponencial referente à complexidade máxima apresentada pelo detector multiusuário ótimo.

Já na fig. 4.16 as mesmas curvas são mostradas, tendo agora como parâmetro o limiar de confiabilidade igual a 0,8. Neste caso a probabilidade de erro de bit apresenta um desempenho próximo

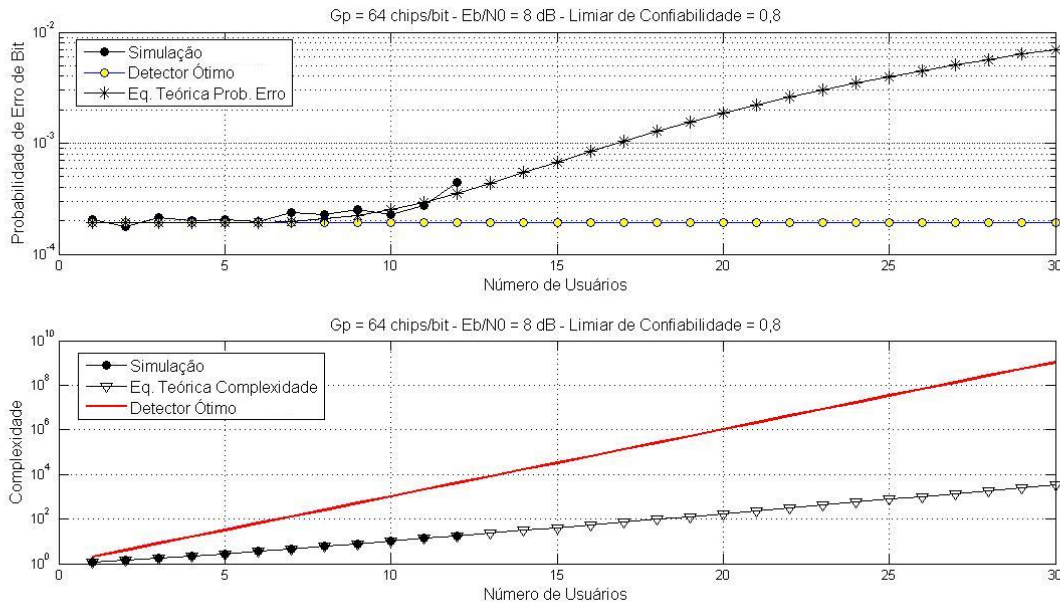


Fig. 4.16: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 0,8.

ao detector ótimo mesmo com 9 usuários ativos. A complexidade por sua vez, cresce com o aumento do número de usuários de uma forma maior que o caso anterior, porém, mesmo assim, apresenta uma complexidade muito inferior se comparada a complexidade do detector multiusuário ótimo. Conforme visto em (4.12) um limiar de confiabilidade maior apresenta uma complexidade maior, justificando assim a complexidade referente a este caso ser maior que a do caso anterior.

Através da fig. 4.17 percebe-se que a probabilidade de erro de bit se mantém a mínima possível até uma configuração do sistema com 11 usuários ativos para um limiar de confiabilidade ajustado em 1,0 e a complexidade, assim como nos casos anteriores, cresce com o aumento do número de usuários, porém, esta complexidade continua sendo bem inferior ao detector multiusuário ótimo.

Por fim, nas fig. 4.18 e 4.19 são realizadas mais duas análises, referente à probabilidade de erro de bit e complexidade em função do número de usuários. Sendo assim, mantendo as mesmas características do sistema consideradas anteriormente, na fig. 4.18 é apresentado um caso na qual um limiar de confiabilidade altíssimo foi considerado, na tentativa de se verificar como o detector multiusuário sub-ótimo proposto se comporta quando o limiar tende à infinito. Com isso, estabelecendo-se um limiar de confiabilidade igual a 10, observa-se que as curvas referente ao detector sub-ótimo proposto acompanham as curvas referente ao detector ótimo, tanto na análise de complexidade, como também na análise da probabilidade de erro de bit. Devido ao fato do limiar de confiabilidade ser muito

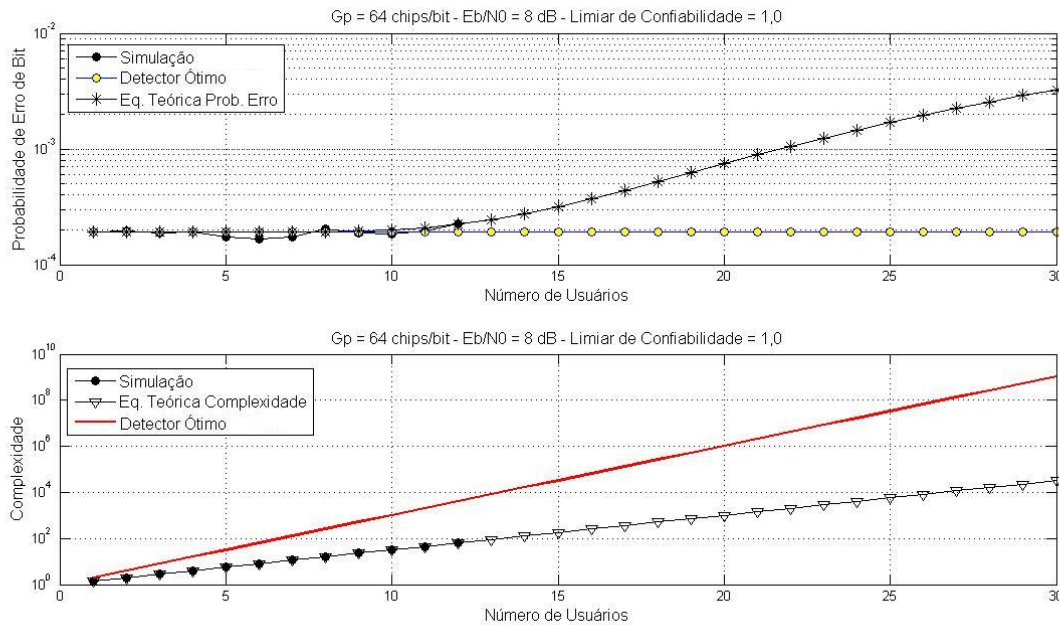


Fig. 4.17: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 1,0.

elevado e as equações teóricas representarem fielmente o comportamento das simulações, as curvas referentes às simulações não foram apresentadas.

Na fig. 4.19 são também apresentadas as probabilidades de erro de bit e complexidade em função do número de usuários, porém neste caso com o limiar de confiabilidade ajustado em 0,0, ou seja, todas as amostras são classificadas como confiáveis. Conforme mostrado no gráfico da probabilidade de erro de bit, com a presença do segundo usuário no sistema a curva referente ao desempenho do detector sub-ótimo proposto já não mais acompanha a curva do detector ótimo. Por outro lado, a complexidade do detector proposto é extremamente inferior à complexidade do detector multiusuário ótimo.

4.4.2 Resultados em Banda Passante

Para a implementação deste algoritmo em banda passante, foram considerados as mesmas condições do sistema em banda base. A única exceção realizada neste caso se deve ao fato de ter sido atribuído um ganho de duas vezes na entrada do filtro casado. Este ganho, tem como objetivo manter os resultados com os mesmos padrões do caso em banda base, no que se diz respeito a amplitude das amostras recebidas. Sendo assim, pode-se iniciar a análise dos gráficos obtidos para este caso em banda pas-

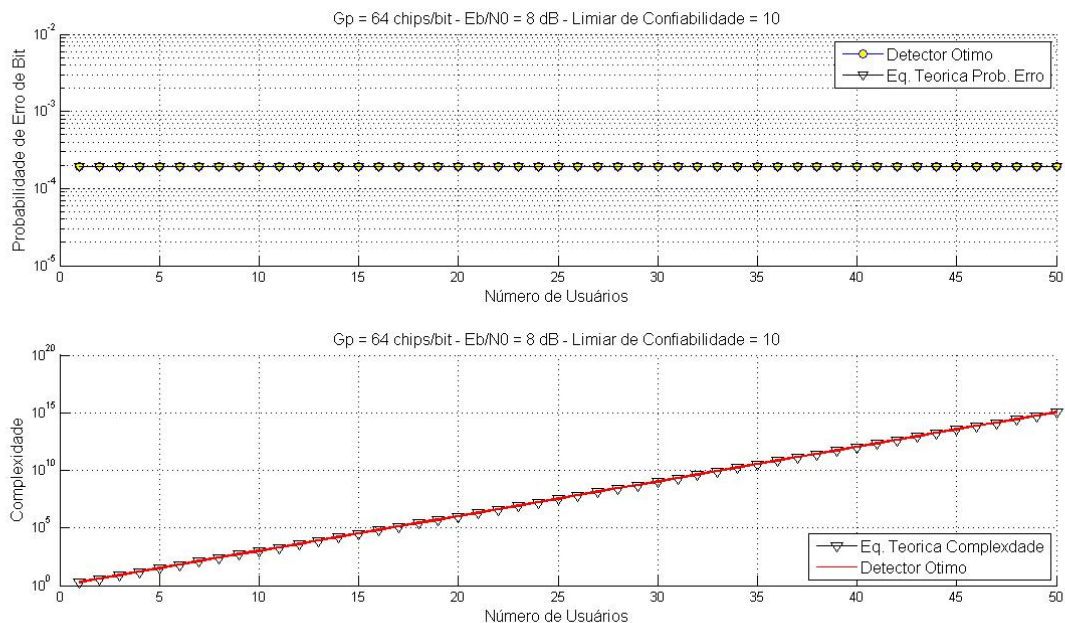


Fig. 4.18: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 10.

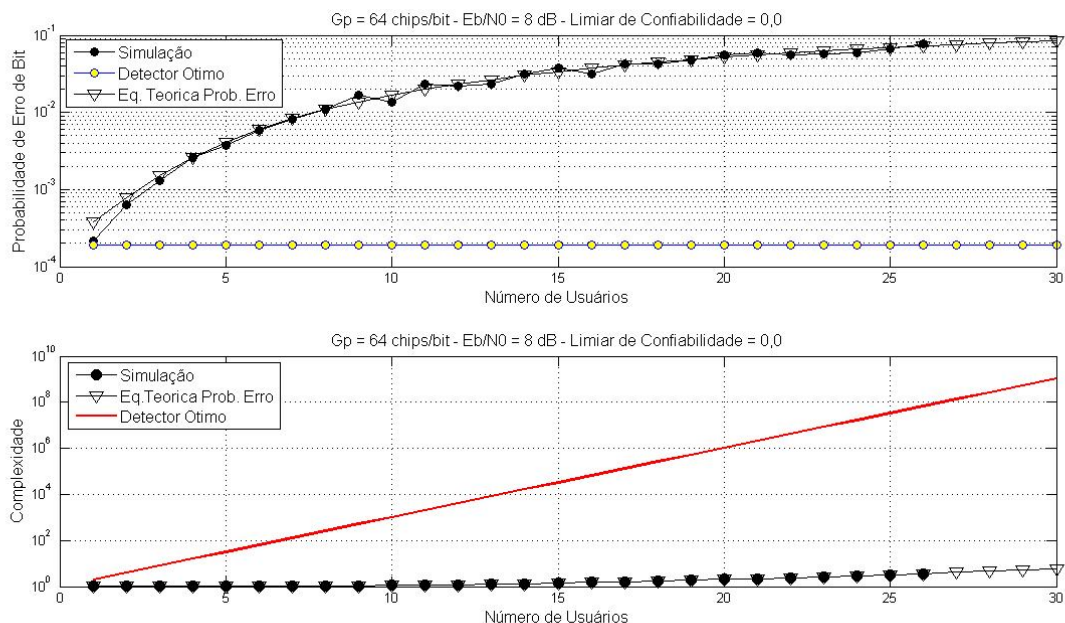


Fig. 4.19: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo em função do número de usuários para um ganho de processamento igual a 64 chips/bit, relação sinal-ruído de 8 dB e limiar de confiabilidade igual a 0,0.

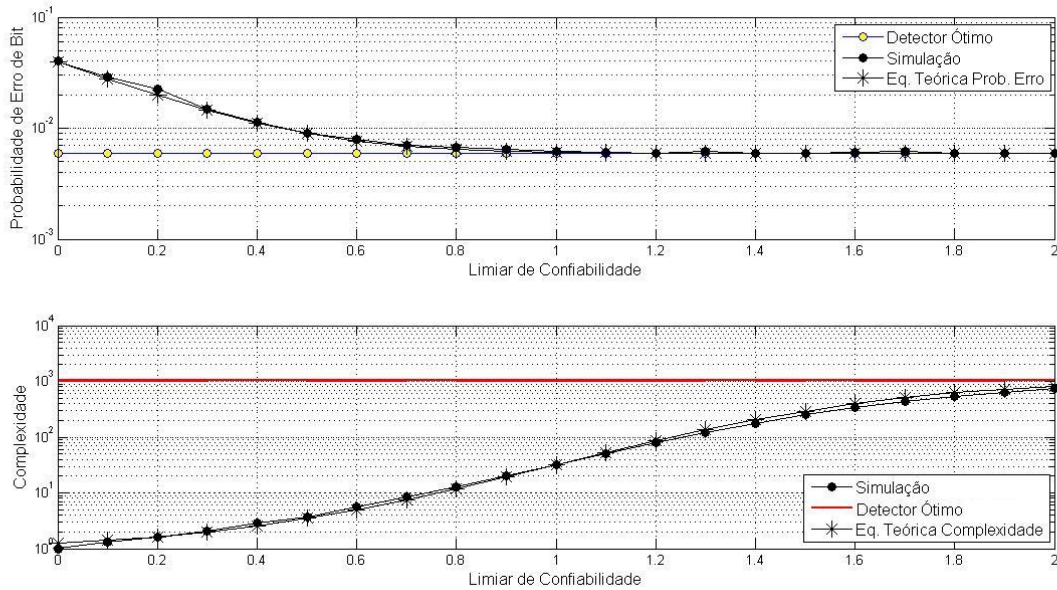


Fig. 4.20: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB em banda passante.

sante, sabendo que a média e a variância são definidas por (2.37) e (2.42). Na fig. 4.20 tem-se os gráficos de probabilidade de erro de bit e complexidade em função dos limiares de confiabilidade, da mesma forma apresentada para o caso em banda base. Neste gráfico tem-se como parâmetros uma relação sinal-ruído igual a 5 dB e um ganho de processamento igual a 32 chips/bit. Observa-se que com um limiar de confiabilidade igual a 0,9 chega-se ao desempenho referente ao detector ótimo, com uma complexidade em número de cálculos próxima a 20. Comparando-se ao caso em banda base, apresentado na fig. 4.3, o limiar escolhido para se obter um desempenho próximo ao detector ótimo é igual 1,2, que por sua vez gera uma complexidade em torno de 80 cálculos.

Já na fig. 4.21 é apresentado o desempenho do algoritmo proposto agora configurado com um ganho de processamento igual a 64 chips/bit e uma relação sinal-ruído igual a 5 dB. Neste caso pode-se verificar que se estabelecendo um limiar de confiabilidade igual a 0,6 chega-se à probabilidade de erro de bit do detector ótimo. Este limiar por sua vez, traduz uma complexidade de aproximadamente 6 cálculos, extremamente inferior aos 1024 referentes ao detector multiusuário ótimo, para esta situação com 10 usuários.

Um ganho de processamento igual a 128 chips/bit é agora considerado na fig. 4.22, mantendo 5 dB como relação sinal-ruído. Observa-se que estabelecendo um limiar de confiabilidade igual a 0,4 é possível se obter um desempenho muito próximo do detector ótimo, com uma complexidade em

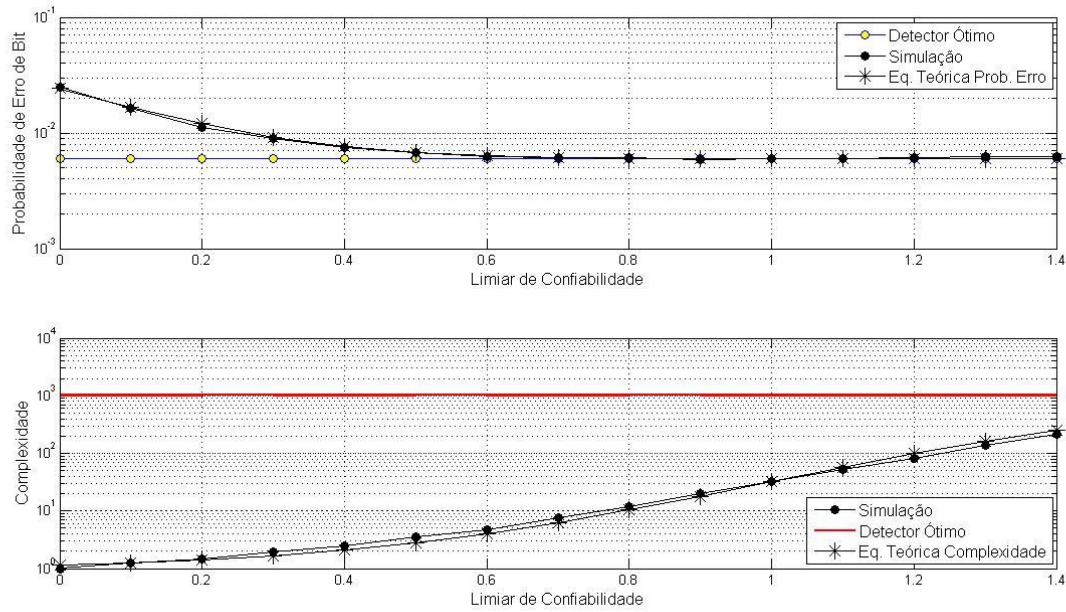


Fig. 4.21: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB em banda passante.

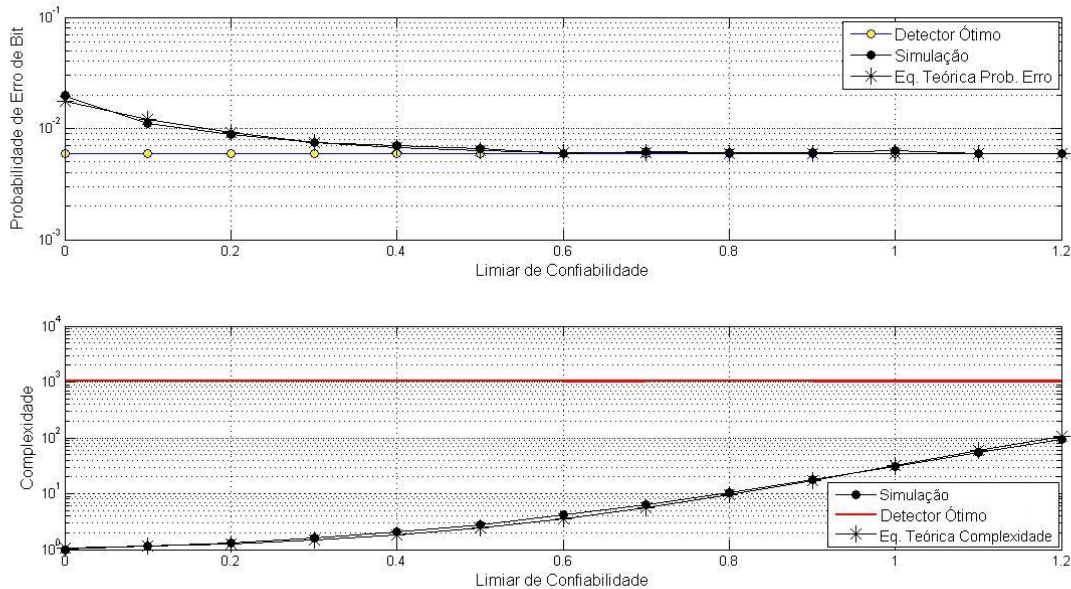


Fig. 4.22: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 5 dB em banda passante.

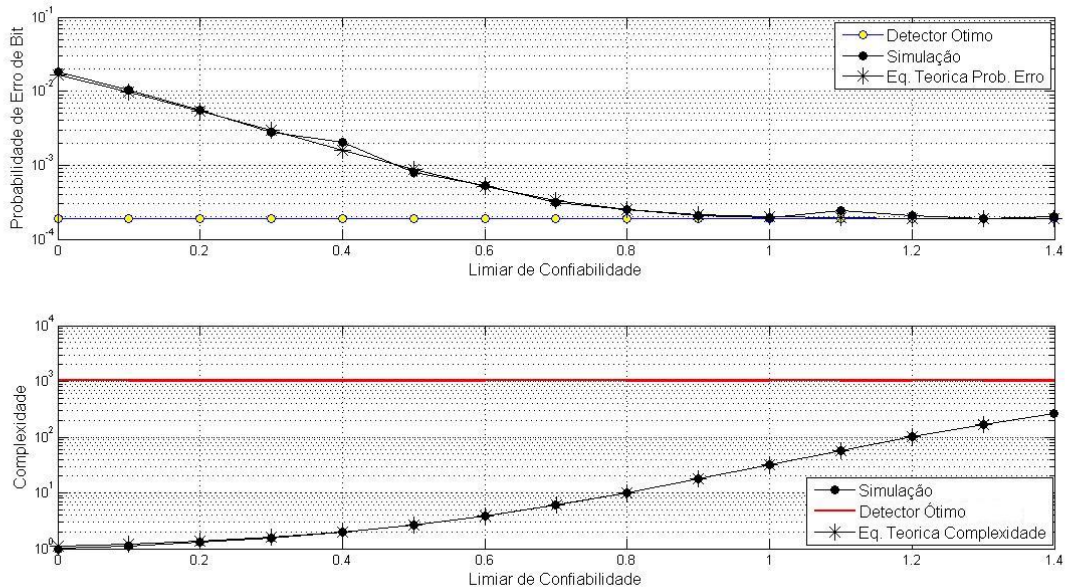


Fig. 4.23: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 32 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB em banda passante.

número de cálculos de apenas 2.

Visto o desempenho do algoritmo proposto para o caso em banda passante com uma relação sinal-ruído de 5 dB, o desempenho deste algoritmo para algumas configurações onde a relação sinal-ruído seja igual a 8 dB é agora verificado. Primeiramente, na fig. 4.23, onde o ganho de processamento considerado é igual a 32 chips/bit, verifica-se que com um limiar próximo a 0,8 obtém-se uma probabilidade de erro de bit próxima do detector ótimo. Para esta configuração, com o limiar de confiabilidade estabelecido em 0,8, a complexidade é próxima a 10.

Estabelecendo agora um ganho de processamento igual a 64 chips/bit com a relação sinal-ruído ajustada em 8 dB, obtém-se a probabilidade de erro de bit do detector ótimo com um limiar igual a 0,6, conforme pode ser observado na fig. 4.24. Com o limiar de confiabilidade igual a 0,6, tem-se uma complexidade próxima a 3, de acordo com o gráfico contido na fig. 4.24.

O último caso a ser analisado com uma relação sinal-ruído igual a 8 dB, apresentado na fig. 4.25, ocorre para um ganho de processamento igual a 128 chips/bit. Neste caso com um limiar de confiabilidade ajustado em 0,3 obtém-se um desempenho próximo ao caso de detecção ótimo. Observa-se através da figura que com este limiar de confiabilidade, a complexidade é inferior a 2. Neste caso, presume-se que o detector multiusuário por confiabilidade classifica quase que todas amostras como confiáveis, não sendo necessário cálculos da métrica para a escolha da sequência de

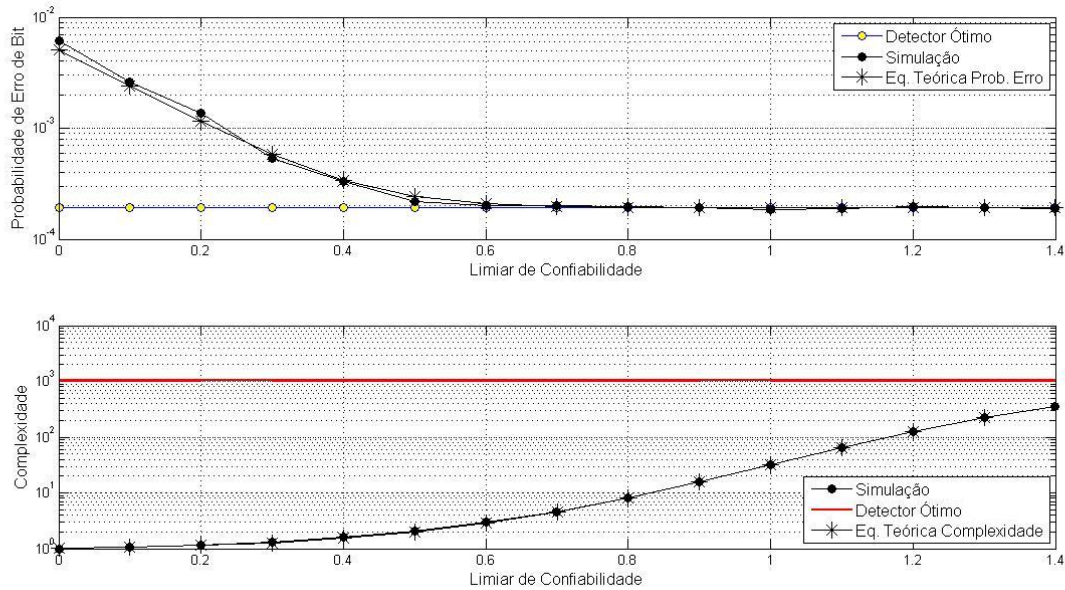


Fig. 4.24: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 64 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB em banda passante.

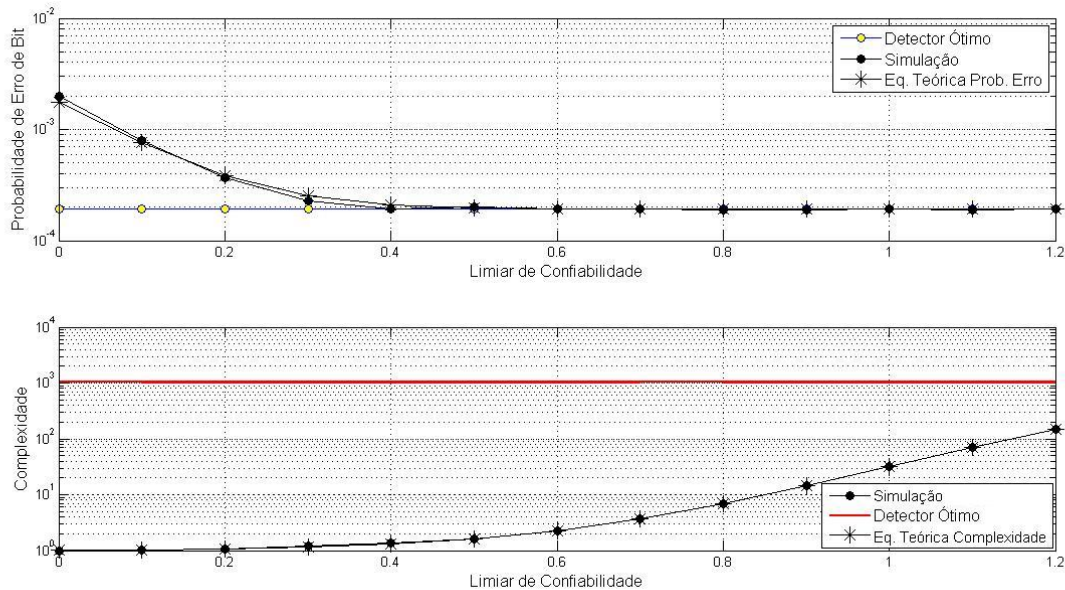


Fig. 4.25: Probabilidade de erro de bit média e complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos, ganho de processamento igual a 128 chips/bit e relação sinal-ruído de 8 dB em banda passante.

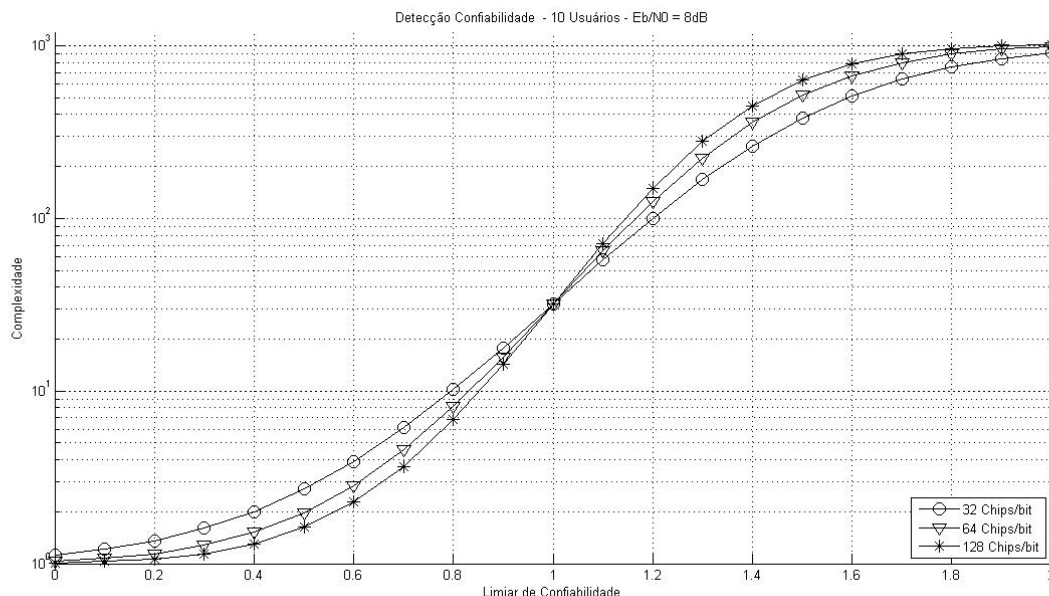


Fig. 4.26: Complexidade em número de cálculos realizados pelo detector sub-ótimo para um sistema com 10 usuários ativos e relação sinal-ruído igual a 8 dB. Comparação para ganhos de processamento igual a 32, 64 e 128 chips/bit, em banda passante.

bits, o que justifica a obtenção de uma complexidade extremamente baixa.

Para os casos analisados em banda passante, observa-se que ao contrário dos obtidos em banda base, o valor dos limiares de confiabilidade e das respectivas complexidades encontrados para o sistema com 5 dB de relação sinal-ruído foi maior do que as encontradas para o caso com 8 dB. Uma melhor relação sinal-ruído gera uma menor complexidade no cálculo da métrica do detector quando se trata o caso em banda passante.

Na fig. 4.26, assim como visto na fig. 4.10, é apresentado um gráfico comparativo entre a complexidade em número de cálculos, tendo como parâmetro o ganho de processamento. Nesta figura, que considera um sistema com 10 usuários ativos e uma relação sinal-ruído igual a 8 dB, são apresentados três curvas, referentes aos ganhos de processamento iguais a 32, 64 e 128 chips/bit. Observa-se, que assim como no caso em banda base, as três curvas se encontram no limiar de confiabilidade igual a 1. Observa-se também que para limiares de confiabilidade menores que 1, quanto maior o ganho de processamento, menor é a complexidade por ele produzida, e para limiares de confiabilidade maiores que 1, o inverso ocorre, assim como também verificado no caso em banda base.

Como os resultados referentes ao caso em banda passante são muito parecidos e as conclusões idênticas ao caso em banda base, as demais análises serão omitidas.

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo principal desta dissertação foi descrever e verificar um algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo, denominado de detector multiusuário por confiabilidade de amostras. Foi considerado um sistema DS-CDMA síncrono, com um canal de comunicação AWGN e a informação modulada através da técnica BPSK.

No Capítulo 3 foi proposta uma expressão do limitante inferior da probabilidade de erro de bit média para o detector multiusuário ótimo, já que este detector não apresenta uma expressão simples, genérica e fechada. Com isso, através de cálculos apresentados, tanto no Capítulo 3 como no Apêndice A, foi obtida esta expressão genérica e aproximada apresentada em (3.27). Esta expressão por sua vez, foi validada através de gráficos que continham curvas obtidas através da simulação de Monte Carlo e também da expressão exata, descrita em (3.28), onde conclui-se que a única restrição ao seu uso, se restringe à configurações de sistema com baixos valores de ganho de processamento, visto as aproximações realizadas para se obter (3.27).

Já no Capítulo 4, foi descrito e analisado o algoritmo de detecção multiusuário por confiabilidade de amostras. Após a completa descrição do algoritmo proposto, foi realizada uma modelagem matemática com o intuito de obter as expressões de probabilidade de erro de bit e complexidade que descrevem o comportamento deste algoritmo. Após a obtenção destas expressões, descritas em (4.12) e (4.16), diversos gráficos foram apresentados, tanto para a visualização do desempenho e complexidade do algoritmo sub-ótimo através de simulações, como também para validação das expressões obtidas, dispostas em curvas teóricas nos gráficos apresentados. Portanto, conclui-se que o algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo proposto apresentou um desempenho próximo ao detector ótimo, com uma complexidade muito inferior a este caso ótimo. As expressões teóricas, por sua vez, mostraram um comportamento muito similar ao obtido através de simulações, podendo representar fielmente as características do detector proposto, tanto em banda base, como em banda passante.

5.1 Contribuições da Dissertação

Resumimos as principais contribuições desta dissertação:

- Elaboramos um algoritmo de detecção multiusuário sub-ótimo, o qual tem o objetivo de obter um desempenho próximo ao detector ótimo, porém com uma complexidade bem inferior ao caso ótimo.
- Expressões de probabilidade de erro de bit e complexidade para o algoritmo de detecção proposto foram estabelecidas e validadas através de simulações.
- Foi proposta uma expressão do limitante inferior da probabilidade de erro de bit média referente ao detector multiusuário ótimo, que descreve o desempenho deste detector quando se utilizam elevados ganhos de processamento.
- Foram simulados diversas configurações do sistema, levando-se em consideração vários ganhos de processamento, números de usuários e relações sinal-ruído, tanto para o caso em banda base, como também para o caso de banda passante.
- Devido ao fato dos ótimos resultados apresentados na presente dissertação, o tema de pesquisa abordado levou à elaboração de um artigo técnico que foi submetido à *IEEE Magazine Transactions on Communications*, além da entrada no pedido de patente da tecnologia inédita junto à Agência de Inovação da Unicamp, INOVA.

5.2 Propostas para Trabalhos Futuros

Algumas propostas para a completa análise da eficácia deste algoritmo são descritas a seguir:

- Expansão dos conceitos deste algoritmo para um sistema CDMA assíncrono.
- Implementação de sistemas CDMA que façam uso de códigos corretores de erro, para uma melhoria no nível de confiabilidade dos bits.
- Análise do comportamento do algoritmo proposto em canais com desvanecimento.
- Consideração de outros métodos de modulação, como por exemplo 4-PSK.

Referências Bibliográficas

- [1] S. S. Haykin, *Communication Systems*, 4a. ed, New York, John Wiley and Sons, 2001.
- [2] A. Papoulis and S.U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4a. ed, New York, McGraw-Hill, 2002.
- [3] R. L. Pickholtz, L. B. Milstein and D. L. Schilling, *Spread Spectrum for Mobile Communications*, IEEE Trans. Vehi. Technology, 40:313-322, May 1991.
- [4] S. C. Yang, *CDMA RF System Engineering*, 1a. ed, Norwood, Artech House, 1998.
- [5] T. S. Rappaport, *Wireless Communications*, 1a. ed, New Jersey, Prentice Hall, 1996.
- [6] R. Prazad, *CDMA for Wirellesss Personal Communication*, 1a. ed, Boston, Artech House, 1996.
- [7] N. Ermolova and S. Hagman, *Simplified Bounds for the Complementary Error Function; Application to the Performance Evaluation of Signal-Processing Systems*, Department of Electrical and Communication Engineering, Helsinki University of Technology - Finland, 2004.
- [8] M. C. Jeruchim, P. Balaban and K. S. Shanmugan, *Simulation of Communication Systems*, 2a. ed, New York, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [9] R. K. Morrow Jr. and J. S. Lenhert, *Bit-to-Bit Erros Dependence in Slotted DS/CDMA Paccket Systems with Random Signature Sequences*, IEEE Trans. on Communications, New York, v.37, no. 10, October 1989.
- [10] S. Verdú, *Minimum Probability of Error for Asynchronous Gaussian Multiple-Access Channels*. IEEE. Trans. Inform. Theory, 32:85-96, January 1986.
- [11] S. Moshavi, *Multi-User Detection for DS-CDMA Communications*, IEEE Communications Magazine, October 1996.
- [12] S. Verdú, *Multiuser Detection*, Cambridge, University Press, 1998.

- [13] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4a. ed, New York, McGraw-Hill, 2000.
- [14] Lupas, R.; Verdú, S. - *Linear Multiuser Detectors for Synchronous CDMA Channels*, IEEE. Trans. on Inform. Theory, Vol. 35, pp 123 – 136, January 1986.

Apêndice A

Obtenção da Expressão Limitante da Probabilidade de Erro de Bit para o Detector Multiusuário Ótimo

Em [12] é realizado uma busca pela expressão de probabilidade de erro de bit para o detector multiusuário ótimo. As condições de transmissão dos sinais consideradas nesta dissertação, são as mesmas consideradas em [12]. Com isso, para a obtenção da expressão de probabilidade de erro de bit, considera-se que sempre haja um erro no bit referente ao primeiro usuário. Desta forma, serão consideradas todas as possibilidades de erro possíveis, levando-se em consideração a restrição citada acima. Uma análise para o caso com 2, 3 e 4 usuários é realizada.

A.1 Dois Usuários

Verdú realiza em [12] uma análise para a obtenção da expressão de probabilidade de erro de bit para o caso com dois usuários e será aqui novamente apresentada. Dado que os bits transmitidos sejam antipodais e a informação de cada usuário é definida por apenas um bit, tem-se que a probabilidade de erro de bit para o primeiro usuário é definida como:

$$\begin{aligned} P_b = & \frac{1}{4}P[+1 + 1 \rightarrow -1 + 1] + \frac{1}{4}P[+1 + 1 \rightarrow -1 - 1] + \frac{1}{4}P[-1 - 1 \rightarrow +1 - 1] + \\ & \frac{1}{4}P[-1 - 1 \rightarrow +1 + 1] + \frac{1}{4}P[-1 + 1 \rightarrow +1 + 1] + \frac{1}{4}P[-1 + 1 \rightarrow +1 - 1] + \\ & \frac{1}{4}P[+1 - 1 \rightarrow -1 - 1] + \frac{1}{4}P[+1 - 1 \rightarrow -1 + 1] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde a notação empregada em cada termo se refere a probabilidade das amostras decididas serem $(\hat{b}_1 \hat{b}_2)$, dado que os bits transmitidos foram $(b_1 b_2)$:

$$P[b_1 b_2 \rightarrow \hat{b}_1 \hat{b}_2] \quad (\text{A.2})$$

onde $b_1 = \pm 1, b_2 = \pm 1, \hat{b}_1 = \pm 1$ e $\hat{b}_2 = \pm 1$.

Devido a simetria do problema, as seguintes probabilidades podem ser consideradas iguais:

$$\begin{aligned} P[+1 + 1 \rightarrow -1 - 1] &= P[-1 - 1 \rightarrow +1 + 1] \\ P[+1 + 1 \rightarrow -1 + 1] &= P[-1 - 1 \rightarrow +1 - 1] \\ P[+1 - 1 \rightarrow -1 + 1] &= P[-1 + 1 \rightarrow +1 - 1] \\ P[+1 - 1 \rightarrow -1 - 1] &= P[-1 + 1 \rightarrow +1 + 1] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Com isso, (A.1) pode ser simplificada e resulta em:

$$P_b = \frac{1}{2}P[-1 - 1 \rightarrow +1 - 1] + \frac{1}{2}P[-1 - 1 \rightarrow +1 + 1] + \frac{1}{2}P[-1 + 1 \rightarrow +1 - 1] + \frac{1}{2}P[-1 + 1 \rightarrow +1 + 1] \quad (\text{A.4})$$

Analisando-se (A.4) termo a termo, percebe-se que dois destes termos contém um erro e os outros dois termos contém dois erros na decisão dos bits. Iniciando a análise pelo primeiro termo desta equação, tem-se a probabilidade de se escolher erroneamente o vetor de bits $(+1 - 1)$ dado que os bits transmitidos foram $(-1 - 1)$. Em termos de distância mínima, isso significa que as amostras de bit observadas estão mais perto de $(+1 - 1)$ do que $(-1 - 1)$. Assim,

$$P[b_1 = -1, b_2 = -1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = -1] \leq P[\Omega(-1 - 1) < \Omega(+1 - 1) | b_1 = -1, b_2 = -1] \quad (\text{A.5})$$

onde o termo $\Omega(-1 - 1)$ equivale à métrica descrita em (3.9), dado que $b_1 = -1$ e $b_2 = -1$. A expressão (A.5) é uma desigualdade pois as amostras observadas podem estar mais perto de $(+1 - 1)$ do que $(-1 - 1)$, mas também podem cair em regiões de decisão diferentes como $(-1 + 1)$ ou $(+1 + 1)$. Com isso, partindo pelo termo do lado direito de (A.5), sabendo que Ω é definido por (3.9), podemos substituir tais equações e realizar os seguintes cálculos para a obtenção da probabilidade de erro de bit em termos da função $Q(x)$:

$$\begin{aligned} P[\Omega(-1 - 1) < \Omega(+1 - 1) | b_1 = -1, b_2 = -1] &= P[-A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_1 A_2 \rho < \\ &< A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_1 A_2 \rho | y_1 = -A_1 - A_2 \rho + n_1; y_2 = -A_1 \rho - A_2 + n_2]; \end{aligned}$$

$$P[\Omega(-1 - 1) < \Omega(+1 - 1) | b_1 = -1, b_2 = -1] = P[n_1 > A_1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.6})$$

A mesma abordagem pode ser empregada nos outros três termos de (A.4). Para o segundo termo de (A.4), a probabilidade de erro de bit pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P[\Omega(-1 - 1) < \Omega(+1 + 1) | b_1 = -1, b_2 = -1] &= P[-A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_1 A_2 \rho < \\ &< A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_1 A_2 \rho | y_1 = -A_1 - A_2 \rho + n_1; y_2 = -A_1 \rho - A_2 + n_2]; \\ P[\Omega(-1 - 1) < \Omega(+1 + 1) | b_1 = -1, b_2 = -1] &= P[A_1 n_1 + A_2 n_2 > A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \rho] = \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \rho}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Desta mesma forma, o terceiro termo de (A.4) equivale à:

$$\begin{aligned} P[\Omega(-1 + 1) < \Omega(+1 - 1) | b_1 = -1, b_2 = +1] &= P[-A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_1 A_2 \rho < \\ &< A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_1 A_2 \rho | y_1 = -A_1 + A_2 \rho + n_1; y_2 = -A_1 \rho + A_2 + n_2]; \\ P[\Omega(-1 + 1) < \Omega(+1 - 1) | b_1 = -1, b_2 = +1] &= P[A_1 n_1 - A_2 n_2 > A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \rho] = \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \rho}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

E por fim, o quarto termo de (A.4) equivale à:

$$\begin{aligned} P[\Omega(-1 + 1) < \Omega(+1 + 1) | b_1 = -1, b_2 = +1] &= P[-A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_1 A_2 \rho < \\ &< A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_1 A_2 \rho | y_1 = -A_1 + A_2 \rho + n_1; y_2 = -A_1 \rho + A_2 + n_2]; \\ P[\Omega(-1 + 1) < \Omega(+1 + 1) | b_1 = -1, b_2 = +1] &= P[n_1 > A_1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Com isso, substituindo (A.6), (A.7), (A.8) e (A.9) em (A.4), chegamos a uma expressão do limitante superior da probabilidade de erro de bit para dois usuários em termos da função $Q(x)$:

$$P_b \leq Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \rho}{\sigma^2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \rho}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.10})$$

A expressão (A.10) é um limitante superior da probabilidade de erro de bit, pois os valores encontrados para cada termo de (A.4) são desigualdades. Considerando controle de potência ideal, ou

seja, todos usuários chegam ao receptor com a mesma amplitude, $A_1 = A_2 = A$, e sabendo que $E_b = A^2 T_b$, então, $A^2/\sigma^2 = 2E_b/N_0$. Com isso, temos que o limitante superior da probabilidade de erro de bit, em termos da relação sinal-ruído, para dois usuários resulta em:

$$P_b \leq Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1+\rho)}\right) \quad (\text{A.11})$$

A.2 Três Usuários

Da mesma forma efetuada para dois usuários, será realizada uma análise com intuito de obter uma expressão do limitante superior da probabilidade de erro de bit para o caso com 3 usuários. Sendo assim, considerando que sempre há a ocorrência de um erro na decisão do bit referente ao primeiro usuário, todas as possibilidades de erro são:

$$\begin{aligned} P_b = & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] \\ & + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] \\ & + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] \\ & + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] \\ & + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] \\ & + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] \\ & + \frac{1}{8}P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] \\ & + \frac{1}{8}P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] \\ & + \frac{1}{8}P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 + 1] \\ & + \frac{1}{8}P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] \\ & + \frac{1}{8}P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Devido a simetria do problema, as seguintes probabilidades são iguais:

$$\begin{aligned}
P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] &= P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 + 1] \\
P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] &= P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] \\
P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] &= P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] \\
P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] &= P[+1 + 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] \\
P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] &= P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] \\
P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] &= P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] \\
P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] &= P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 + 1] \\
P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] &= P[+1 + 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] \\
P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] &= P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] \\
P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] &= P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 + 1] \\
P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] &= P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] \\
P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] &= P[+1 - 1 + 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] \\
P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] &= P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 - 1] \\
P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] &= P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 - 1] \\
P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] &= P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 - 1 + 1] \\
P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] &= P[+1 - 1 - 1 \rightarrow -1 + 1 + 1]
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Com isso, (A.12) se reduz a:

$$\begin{aligned}
P_b = & \frac{1}{4}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] + \frac{1}{4}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] + \frac{1}{4}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] \\
& + \frac{1}{4}P[-1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] + \frac{1}{4}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] + \frac{1}{4}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] \\
& + \frac{1}{4}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] + \frac{1}{4}P[-1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] + \frac{1}{4}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] \\
& + \frac{1}{4}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1] + \frac{1}{4}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] + \frac{1}{4}P[-1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] \\
& + \frac{1}{4}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1] + \frac{1}{4}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1] + \frac{1}{4}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1] \\
& + \frac{1}{4}P[-1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1]
\end{aligned} \tag{A.14}$$

O detector de distância mínima tem em sua saída o conjunto $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3) \in \pm 1$ que maximiza a seguinte função:

$$\begin{aligned}
\Omega(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3) = & \max_{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3} \left[A_1 \hat{b}_1 y_1(t) + A_2 \hat{b}_2 y_2(t) + A_3 \hat{b}_3 y_3(t) \right. \\
& \left. - A_1 A_2 \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rho_{12} - A_1 A_3 \hat{b}_1 \hat{b}_3 \rho_{13} - A_2 A_3 \hat{b}_2 \hat{b}_3 \rho_{23} \right]
\end{aligned} \tag{A.15}$$

onde os valores de $y_i(t)$ correspondem a:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 b_1 + A_2 b_2 \rho_{12} + A_3 b_3 \rho_{13} + n_1 \\ y_2(t) &= A_1 b_1 \rho_{12} + A_2 b_2 + A_3 b_3 \rho_{23} + n_2 \\ y_3(t) &= A_1 b_1 \rho_{13} + A_2 b_2 \rho_{23} + A_3 b_3 + n_3 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Em (A.15) e (A.16), ρ_{12} corresponde à correlação cruzada entre as sequências de espalhamento do usuário 1 e do usuário 2, ρ_{13} se refere à correlação cruzada entre as sequências dos usuários 1 e 3 e por fim, ρ_{23} se refere à correlação cruzada entre as sequências dos usuários 2 e 3.

Partindo para a análise termo a termo de (A.14), iniciamos pelo primeiro termo do lado direito, onde há a ocorrência de apenas um erro no bit do primeiro usuário. O detector comete o erro decidindo pela sequência $(+1 - 1 - 1)$ ao invés da sequência transmitida $(-1 - 1 - 1)$. Com isso,

$$\begin{aligned} &P[b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = -1, \hat{b}_3 = -1] \leq \\ &\leq P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 - 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A partir do lado direito de (A.17), podemos obter uma expressão para esta probabilidade de erro em termos da função $Q(x)$.

$$\begin{aligned} &P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 - 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] = P[-A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3 - \\ &- A_1 A_2 \rho_{12} - A_1 A_3 \rho_{13} - A_2 A_3 \rho_{23} < A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3 + A_1 A_2 \rho_{12} + A_1 A_3 \rho_{13} - A_2 A_3 \rho_{23} \mid \\ &\mid y_1 = -A_1 - A_2 \rho_{12} - A_3 \rho_{13} + n_1, y_2 = -A_1 \rho_{12} - A_2 - A_3 \rho_{23} + n_2, y_3 = -A_1 \rho_{13} - A_2 \rho_{23} - A_3 + n_3] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Realizando as devidas substituições, obtém-se:

$$P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 - 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] = P[n_1 > A_1] = Q\left(\frac{A_1}{\sigma}\right) \quad (\text{A.19})$$

Este mesmo resultado pode ser atribuído aos termos de (A.14) na qual ocorre apenas um erro de decisão dos bits. São estes:

$$\begin{aligned} &P[\Omega(-1 - 1 + 1) < \Omega(+1 - 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = +1] = Q\left(\frac{A_1}{\sigma}\right) \\ &P[\Omega(-1 + 1 - 1) < \Omega(+1 + 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = -1] = Q\left(\frac{A_1}{\sigma}\right) \\ &P[\Omega(-1 + 1 + 1) < \Omega(+1 + 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = +1] = Q\left(\frac{A_1}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Partimos agora para os casos onde ocorrem erros no primeiro e segundo usuário, correspondente ao segundo, sexto, décimo e décimo quarto termos de (A.14). A análise referente ao segundo termo é

realizada.

$$\begin{aligned} & P[b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = +1, \hat{b}_3 = -1] \leq \\ & \leq P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 + 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} & P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 + 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] = P[-A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3 - \\ & - A_1 A_2 \rho_{12} A_1 A_3 \rho_{13} - A_2 A_3 \rho_{23} < A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_3 y_3 - A_1 A_2 \rho_{12} + A_1 A_3 \rho_{13} + A_2 A_3 \rho_{23} \mid \\ & \mid y_1 = -A_1 - A_2 \rho_{12} - A_3 \rho_{13} + n_1, y_2 = -A_1 \rho_{12} - A_2 - A_3 \rho_{23} + n_2, y_3 = -A_1 \rho_{13} - A_2 \rho_{23} - A_3 + n_3] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} & P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 + 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] = \\ & = P[A_1 n_1 + A_2 n_2 > A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \rho_{12}] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1 A_2 \rho_{12}}{\sigma^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

O resultado obtido em A.23 é o mesmo referente ao sexto termo de (A.14):

$$P[\Omega(-1 - 1 + 1) < \Omega(+1 + 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = +1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1 A_2 \rho_{12}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.24})$$

Já para o décimo e décimo quarto termos de (A.14), os resultados são similares aos obtidos anteriormente, sendo, respectivamente:

$$P[\Omega(-1 + 1 - 1) < \Omega(+1 - 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = -1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1 A_2 \rho_{12}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.25})$$

$$P[\Omega(-1 + 1 + 1) < \Omega(+1 - 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = +1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1 A_2 \rho_{12}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.26})$$

Analisando-se agora o terceiro termo de (A.14), onde ocorrem dois erros de decisão dos bits, porém no primeiro e terceiro usuários, $(-1 - 1 - 1) \rightarrow (+1 - 1 + 1)$, temos que:

$$\begin{aligned} & P[b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = -1, \hat{b}_3 = +1] \leq \\ & \leq P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 - 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Com isso,

$$P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 - 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] = P[-A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3 - A_1 A_2 \rho_{12} A_1 A_3 \rho_{13} - A_2 A_3 \rho_{23} < A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_1 A_2 \rho_{12} - A_1 A_3 \rho_{13} + A_2 A_3 \rho_{23} \mid y_1 = -A_1 - A_2 \rho_{12} - A_3 \rho_{13} + n_1, y_2 = -A_1 \rho_{12} - A_2 - A_3 \rho_{23} + n_2, y_3 = -A_1 \rho_{13} - A_2 \rho_{23} - A_3 + n_3] \quad (\text{A.28})$$

Realizando os devidos cálculos, chegamos ao seguinte resultado.

$$P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 - 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] = P[A_1 n_1 + A_3 n_3 > A_1^2 + A_3^2 + 2A_1 A_3 \rho_{13}] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1 A_3 \rho_{13}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.29})$$

Novamente o resultado obtido pode ser empregado em outro termo de (A.14), sendo agora aplicado ao décimo primeiro termo da respectiva equação. Com isso,

$$P[\Omega(-1 + 1 - 1) < \Omega(+1 + 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = -1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1 A_3 \rho_{13}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.30})$$

Para os demais termos referentes a erros ocorridos no primeiro e terceiro usuários a probabilidade de erro de bit pode ser descrita como:

$$P[\Omega(-1 - 1 + 1) < \Omega(+1 - 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = +1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1 A_3 \rho_{13}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.31})$$

$$P[\Omega(-1 + 1 + 1) < \Omega(+1 + 1 - 1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = +1] = Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1 A_3 \rho_{13}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.32})$$

Por fim, é analisado o caso de ocorrência de três erros. Inicia-se o cálculo referente ao quarto termo de (A.14).

$$P[b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = +1, \hat{b}_3 = +1] \leq P[\Omega(-1 - 1 - 1) < \Omega(+1 + 1 + 1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned}
P[\Omega(-1-1-1) < \Omega(+1+1+1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] &= P[-A_1y_1 - A_2y_2 - A_3y_3 - \\
&- A_1A_2\rho_{12}A_1A_3\rho_{13} - A_2A_3\rho_{23} < A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_1A_2\rho_{12} + A_1A_3\rho_{13} + A_2A_3\rho_{23} \mid \\
&\mid y_1 = -A_1 - A_2\rho_{12} - A_3\rho_{13} + n_1, y_2 = -A_1\rho_{12} - A_2 - A_3\rho_{23} + n_2, y_3 = -A_1\rho_{13} - A_2\rho_{23} - A_3 + n_3]
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
P[\Omega(-1-1-1) < \Omega(+1+1+1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] &= \\
P[A_1n_1 + A_2n_2 + A_3n_3 > A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2\rho_{12} + 2A_1A_3\rho_{13} + 2A_2A_3\rho_{23}]
\end{aligned} \tag{A.35}$$

De acordo com a definição da função Q, a probabilidade de erro para este caso de três erros é igual a:

$$\begin{aligned}
P[\Omega(-1-1-1) < \Omega(+1+1+1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = -1] &= \\
= Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} + \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right)
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Os outros casos onde ocorrem erro nos três usuários, segundo (A.14), são respectivamente:

$$\begin{aligned}
&P[b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = +1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = +1, \hat{b}_3 = -1] \leq \\
&\leq P[\Omega(-1-1+1) < \Omega(+1+1-1) \mid b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = +1] = \\
&= Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} - \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right)
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
&P[b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = -1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = -1, \hat{b}_3 = +1] \leq \\
&\leq P[\Omega(-1+1-1) < \Omega(+1-1+1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = -1] = \\
&= Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} - \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right)
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
&P[b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = +1 \rightarrow \hat{b}_1 = +1, \hat{b}_2 = -1, \hat{b}_3 = -1] \leq \\
&\leq P[\Omega(-1+1+1) < \Omega(+1-1-1) \mid b_1 = -1, b_2 = +1, b_3 = +1] =
\end{aligned}$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} + \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.39})$$

Dado que obteve-se o resultado de todos os termos de (A.14), estes serão substituídos na própria equação, resultando em:

$$\begin{aligned} P_b \leq & Q\left(\frac{A_1}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2}}\right) \\ & + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2}}\right) \\ & + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} + \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right) \\ & + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} - \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right) \\ & + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} + \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} - \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right) \\ & + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{A_1^2}{\sigma^2} + \frac{A_2^2}{\sigma^2} + \frac{A_3^2}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_2\rho_{12}}{\sigma^2} - \frac{2A_1A_3\rho_{13}}{\sigma^2} + \frac{2A_2A_3\rho_{23}}{\sigma^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Considerando um controle de potência ideal na recepção, ou seja, $A_1 = A_2 = A_3 = A$ e ainda que as correlações cruzadas entre as sequências de espalhamento sejam iguais, $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \rho$, o limitante superior da probabilidade de erro de bit para a detecção multiusuário para três usuários, em função da relação sinal-ruído, resulta em:

$$\begin{aligned} P_b \leq & Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) + Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1+\rho)}\right) + \\ & \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}(1-2\rho)}\right) + \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}\left(1-\frac{2}{3}\rho\right)}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

A.3 Quatro Usuários

Assim como realizado para dois e três usuários, foram realizados cálculos com o intuito de se obter uma expressão para o limitante superior da probabilidade de erro de bit do detector ótimo para o caso de quatro usuários. Porém, devido ao número de cálculos necessários para se obter esta expressão ser muito grande, todo o desenvolvimento matemático não será apresentado, conforme foi realizado para

os outros dois casos. Por outro lado, os cálculos omitidos aqui seguem exatamente a mesma linha de raciocínio dos apresentados anteriormente, sendo apenas acrescido de mais termos. Com isso, as possíveis ocorrências de erro no bit do primeiro usuário, que definem a probabilidade de erro de bit, já tendo seus termos de mesmo valor adicionados, são:

$$\begin{aligned}
 P_b = & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \\
 & \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 - 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 - 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 - 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 - 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 + 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 + 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 + 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 + 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 + 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \\
& \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 + 1 - 1 - 1] + \frac{1}{8}P[-1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow +1 - 1 - 1 - 1]
\end{aligned}
\tag{A.42}$$

O detector de distância mínima tem em sua saída o conjunto $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4) \in \pm 1$ que maximiza a seguinte métrica:

$$\begin{aligned}
\Omega(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4) = & \max_{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4} \left[A_1 \hat{b}_1 y_1(t) + A_2 \hat{b}_2 y_2(t) + A_3 \hat{b}_3 y_3(t) + A_4 \hat{b}_4 y_4(t) - A_1 A_2 \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rho_{12} - \right. \\
& \left. A_1 A_3 \hat{b}_1 \hat{b}_3 \rho_{13} - A_1 A_4 \hat{b}_1 \hat{b}_4 \rho_{14} - A_2 A_3 \hat{b}_2 \hat{b}_3 \rho_{23} - A_2 A_4 \hat{b}_2 \hat{b}_4 \rho_{24} - A_3 A_4 \hat{b}_3 \hat{b}_4 \rho_{34} \right]
\end{aligned}
\tag{A.43}$$

onde os respectivos valores de $y_i(t)$ são:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= A_1 b_1 + A_2 b_2 \rho_{12} + A_3 b_3 \rho_{13} + A_4 b_4 \rho_{14} + n_1 \\
y_2(t) &= A_1 b_1 \rho_{12} + A_2 b_2 + A_3 b_3 \rho_{23} + A_4 b_4 \rho_{24} + n_2 \\
y_3(t) &= A_1 b_1 \rho_{13} + A_2 b_2 \rho_{23} + A_3 b_3 + A_4 b_4 \rho_{34} + n_3 \\
y_4(t) &= A_1 b_1 \rho_{14} + A_2 b_2 \rho_{24} + A_3 b_3 \rho_{34} + A_4 b_4 + n_4
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Com isso, realizando a análise termo a termo de (A.42), conforme realizado anteriormente para os outros casos, chegamos à expressão do limitante superior da probabilidade de erro de bit para um sistema com quatro usuários ativos, já em termos da relação sinal-ruído:

$$\begin{aligned}
P_b \leq & Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{4\frac{E_b}{N_0}(1+\rho)}\right) + \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}(1+2\rho)}\right) + \\
& \frac{9}{4}Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}(1-\frac{2}{3}\rho)}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{8\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{3}{8}Q\left(\sqrt{8\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) + \frac{1}{8}Q\left(\sqrt{8\frac{E_b}{N_0}(1+3\rho)}\right)
\end{aligned} \tag{A.45}$$

onde foi considerado um controle de potência ideal e que as correlações cruzadas entre as sequências de espalhamento dos usuários são idênticas, $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = \rho$.